الترقيم الدولي ٨٦٩٠ - ١٩٩١ ISSN 1991- 8690

استخدام الحل التحليلي لمعادلات الحركة للقمر الاصطناعي في إيجـــاد العناصر البعدية للمـــدار بواسطة نظرية Kustaanheimo-Stiefel

مهند علي عبد الزيدي

جامعة ذي قار- كلية العلوم- قسم الفيزياء

الخلاصة

تم في هذا البحث استخدام الحل التحليلي لمعادلات الحركة للقمر الاصطناعي في إيجاد العناصر البعدية للمدار المتمثلة بنصف المحور الكبير Semi-major axis والانحراف المركزي Eccentricity وكان ذلك تحت تأثير التوافقية الثانية J_2 ولمدار الدورة القصيرة لثلاث شروط ابتدائية تبين من خلالها إن الزيادة في قيمة الانحراف المركزي Eccentricy يصاحبها دائما زيادة في قيمة نصف المحور الكبير والذي يثبت العلاقة الخطية بين القيمتين وتم حساب هذين العنصرين باستخدام نظرية Kustaanheimo-Stiefel التي تتلخص بحساب العوامل الناتجة من التكامل التحليلي للمعادلات التفاضلية بوساطة عوامل يطلق عليها عوامل K-S، حيث تم في البدء حساب القيم الابتدائية لهذه العوامل من خلال علاقاتها مع المسافة والسرعة الابتدائية للقمر الاصطناعي ومن ثم يتكفل الحل التحليلي بحساب قيم العوامل المشار إليها وهي ($\alpha,\beta,\lambda,\lambda^*$) تباعا.

١- المقدمة

يعتمد مبدأ الأقمار الاصطناعية على مسالة جسمين حيث إن القمر الاصطناعي يدور حول الأرض في مدارات معينة مقسمة حسب الارتفاع عن سطح الأرض وكذلك حسب الحاجة المرجوة من هذا القمر أو ذاك.

أثناء وجود القمر الاصطناعي في مداره يتعرض لعدة مشاكل تسمى الاضطرابات المدارية ، وهي انحراف العناصر المدارية عن معدلاتها في حركة جسمين بتأثير عوامل عديدة وتقسم هذه الاضطرابات إلى جذبية وغير جذبية ، أما الجذبية التي إحدى تطبيقاتها بحثنا هذا فهي ناتجة عن قوة الجذب بين الجسم الذي يدور والأجسام الأخرى مثل جاذبية الشمس والقمر ، وعدم انتظام جاذبية الأرض بسبب تفلطحها الذي يؤثر في حركة القمر الاصطناعي الواطئ[1].

يعبر عن عدم انتظام الجاذبية الأرضية بجهد الجاذبية الأرضية والمقياس في حساب قيمة هذا الجهد يتم من خلال معرفة ما يسمى بالتوافقيات وأهمها وأكثرها تأثيرا هي التوافقيات الموقعية وقيم هذه التوافقيات هي[2]

$$J_2 = 1082.63E-3$$
$$J_3 = -2.54E-6$$
$$J_4 = -1.62E-6$$
$$J_5 = -0.23E-6$$
$$J_6 = 0.25E-6$$

هذه القيم قد أوجدت عالمياً بواسطة مقاييس الجاذبية Gravitometry المحمولة على الأقمار الاصطناعية والتي تستطيع الكشف عن قوى الجاذبية عند مناطق وارتفاعات مختلفة، ومن الجدير بالذكر أن جهد التوافقيات الموقعية يكون متناظراً حول المحور القطبي وأن التوافقية الثانية (J_2) هي المتغلبة على بقية التوافقيات الموقعية.

من الطرق المستخدمة لمعرفة تأثير التوافقيات وحساب الموقع والسرعة وبالتالي معرفة العناصر المدارية للقمر الاصطناعي هي نظرية K-S التي وصفها كل من Stiefel and Scheifele في عام ١٩٧١م ، وتتلخص هذه النظرية في حساب العناصر الأساسية للمدار بطريقة أكثر دقة من خلال الاعتماد على تكامل معادلتين تفاضليتين نحسب من خلالهما العاملان (α, β) اللذان يعتمدان أيضا على مجموعة عوامل أهمها بعد القمر الاصطناعي عن مركز الأرض وسرعته في المدار وكذلك جهد الجاذبية الذي يتعرض له ، وبعد الحصول على المسافة والسرعة لكل لحظة زمنية يتم حساب العناصر المدارية التي تمكننا من معرفة سلوك القمر الاصطناعي في مداره.

2- النظرية

٢-١ معادلات التكامل التحليلي

توصف معاملات نظرية K-S بالمتغيرين (α_i , β_i) ولإيجاد قيم هذين المعاملين تكامل المعادلة التفاضلية الخاصة بحساب قيم (α_i , β_i) تحليليا فتنتج العلاقة التي من خلالها يمكن حساب هذه القيم تحليليا من خلال العلاقة[3]

$$\Delta\alpha_i = \frac{\mu J_2 R^2}{8w^2 a^3}\Big[q_0^i \rho_3^{00} + q_1^i \rho_3^{10} + q_2^i \rho_3^{01} + \frac{3}{a}\left(g_0^k \rho_4^{00} + g_1^k \rho_4^{10} + g_2^k \rho_4^{20} + g_3^k \rho_4^{01} + g_4^k \rho_4^{11} \right) - \frac{6}{a^2}\left(f_0^i \rho_5^{00} + f_1^i \rho_5^{10} + f_2^i \rho_5^{20} + f_3^i \rho_5^{30} + f_4^i \rho_5^{01} + f_5^i \rho_5^{11} + f_6^i \rho_5^{21} \right)\Big] \quad (1)$$

ويتم التعويض عن قيم q_1^i , q_2^i q_0^i , من التالي

$$q_0^i = \alpha_i, \quad q_1^i = \alpha_i, \quad q_2^i = \beta_i$$

حيث إن R معدل نصف قطر الأرض وقيمته تساوي 6378.16 km،μ تمثل ثابت الجاذبية، a نصف المحور الكبير ويعطى من العلاقة [4]

$$a=\left(\frac{2}{r}-\left(\frac{\dot{x}^{2}}{k}\right)\right)^{-1} \qquad (2)$$

ويتم حساب المعامل ρ في المعادلة رقم (١) من العلاقات التالية التي تعتمد على كل من زاوية الانحراف الشاذ (E) والانحراف المركزي (e) [3]

$$\rho_0^{00}=E,\ \ \rho_1^{00}=\frac{2}{\sqrt{\eta}}\tan\left[\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2}}\tan\left(\frac{E}{2}\right)\right],\quad \rho_n^{01}=-\frac{1}{(n-1)e\phi^{n-1}},\ n>1,$$

$$\rho_n^{11}=\frac{1}{e}\left(\rho_n^{01}-\rho_{n-1}^{01}\right),\ n>2 \qquad (3)$$

$$\rho_5^{21}=\frac{1}{e^{2}}\left(\rho_5^{01}-2\rho_4^{01}+\rho_3^{01}\right),$$

$$\rho_n^{m0}=\frac{1}{(-e)^{m}}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}\rho_{n-k}^{00},$$

$$\phi=\frac{r}{a},\ \ \eta=1-e^{2}$$

وممكن الحصول على قيم العوامل f,g في معادلة (١) من الآتي

$$\begin{aligned}a_0&=\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_4\\ a_1&=\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_4-\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_4\\ a_2&=\alpha_1\beta_3+\beta_1\alpha_3+\alpha_2\beta_4+\beta_2\alpha_4\end{aligned} \qquad (4)$$

$$\begin{aligned}&b_0=a_0^{2}+a_2^{2},\ b_1=2a_0a_1\\ &b_2=a_1^{2}-a_2^{2},\ b_3=2a_0a_2,\ b_4=2a_1a_2\end{aligned} \qquad (5)$$

$$g_0^{k}=a_0q_0^{k}+a_2q_2^{k}$$

$$\begin{aligned} g_1^k &= a_1 q_0^k + a_0 q_1^k \\ g_2^k &= a_1 q_1^k + a_2 q_2^k \\ g_3^k &= a_2 q_0^k + a_0 q_2^k \\ g_4^k &= a_1 q_2^k + a_2 q_1^k \end{aligned} \qquad (6)$$

$$\begin{aligned} f_0^i &= b_0 q_0^i + b_3 q_2^i \\ f_1^i &= b_1 q_0^i + b_0 q_1^i + b_4 q_2^i \\ f_2^i &= b_2 q_0^i + b_1 q_1^i - b_3 q_2^i \\ f_3^i &= b_2 q_1^i - b_4 q_2^i \\ f_4^i &= b_3 q_0^i + b_0 q_2^i \\ f_5^i &= b_4 q_0^i + b_3 q_1^i + b_1 q_2^i \\ f_6^i &= b_4 q_1^i + b_2 q_2^i \end{aligned} \qquad (7)$$

وبالطريقة التي تم بها حساب $\alpha\Delta_i$ ممكن أن نجد $\beta\Delta_i$ حيث تطبق نفس الخطوات مع إبدال دالة sin إلى دالة cos فتكون معادلة حساب α [6,5]

$$\alpha_{iE_1} = \alpha_{i\,0} + \Delta\alpha_{iE_1} \qquad (8)$$

أما أيجاد قيمة $\beta\Delta_i$ فتكون كما تقدم بنفس الخطوات لحساب $\Delta\alpha$ مع تغير قيم q_1^i , q_2^i q_0^i,إلى

$$q_0^i = \beta_i ,\quad q_1^i = -\beta_i ,\quad q_2^i = \alpha_i$$

نجد بعد ذلك قيمة β_i من العلاقة

$$\beta_{iE_1} = \beta_{i\,0} + \Delta\beta_{iE_1} \qquad (9)$$

٣-٢الشروط الابتدائية

من الممكن التعبير عن معاملات K-S من خلال العلاقتان أدناه [7,6,5]

$$\lambda_i = \alpha_i \cos\left(E/2\right) + \beta_i \sin\left(E/2\right) \tag{10}$$

$$\lambda^*_i = -\alpha_i \sin\left(E/2\right) + \beta_i \cos\left(E/2\right) \tag{11}$$

في حالة القمر الاصطناعي الذي تكون قيمة $x_1 = 0$ (التي تمثل المسافة باتجاه x-axis) يمكن وضع المعادلات التالية لحساب القيم الابتدائية لعوامل K-S [5]

$$\begin{aligned} &\lambda_2^2 + \lambda_3^2 = (r - x_1)/2 \\ &\lambda_1 = (x_2\lambda_2 + x_3\lambda_3)/(r - x_1) \\ &\lambda_4 = (x_3\lambda_2 - x_2\lambda_3)/(r - x_1) \end{aligned} \tag{12}$$

حيث تمثل λ_i (i=1,2,3,4) احد عوامل KS ، r المسافة نصف القطرية

كما يمكن حساب العامل λ_i^* من العلاقات التالية

$$\begin{aligned} &\lambda_1^* = (\lambda_1\dot{x}_1 + \lambda_2\dot{x}_2 + \lambda_3\dot{x}_3)/4w \\ &\lambda_2^* = (-\lambda_2\dot{x}_1 + \lambda_1\dot{x}_2 + \lambda_4\dot{x}_3)/4w \\ &\lambda_3^* = (-\lambda_3\dot{x}_1 - \lambda_4\dot{x}_2 + \lambda_1\dot{x}_3)/4w \\ &\lambda_4^* = (\lambda_4\dot{x}_1 - \lambda_3\dot{x}_2 + \lambda_2\dot{x}_3)/4w \end{aligned} \tag{13}$$

حيث إن $\dot{x}_1$ السرعة باتجاه x-axis، $\dot{x}_2$ السرعة باتجاه y-axis، $\dot{x}_3$ السرعة باتجاه z-axis.

وتعطى قيمة w التي تمثل التردد الزاوي من العلاقة[8]

$$w = \sqrt{\left(0.5\left(k/r - 0.5|x|^2 - v\right)\right)} \tag{14}$$

وممكن حساب المتغير v الذي يمثل جهد الجاذبية الأرضية من العلاقة

$$v = \frac{\mu J_2 R^2}{2r^3}\left[-1 + 3\frac{x_3^2}{r^3}\right] \tag{15}$$

x_3 المسافة باتجاه z-axis.

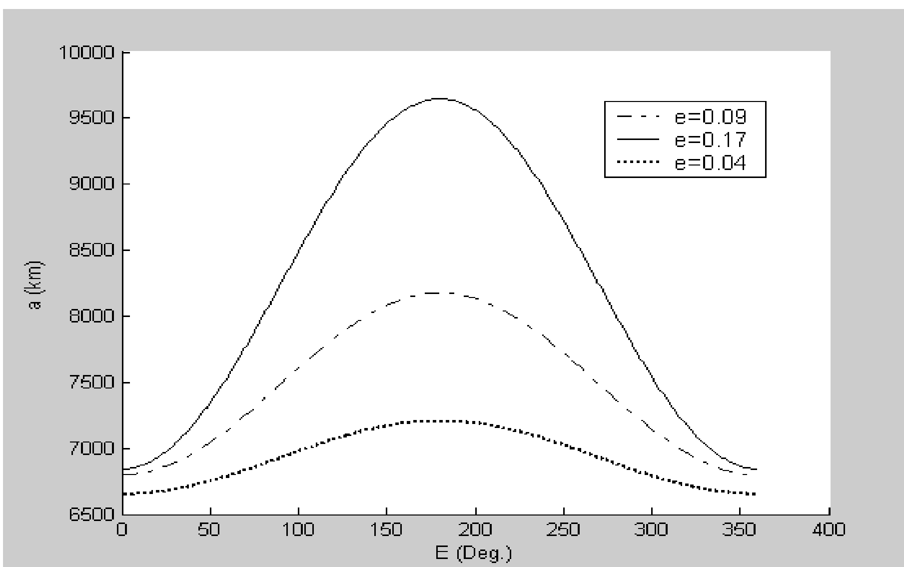
ومن العلاقتان (١١) و (١٢) وبتعويض قيمة الانحراف الشاذ صفرا(E=0) يكون $\alpha_i = \lambda_i , \beta_i = 2\lambda^*_i \ (i = 1,2,3,4)$

٣- النتائج والمناقشة

الجدول رقم -١- يمثل الشروط الابتدائية

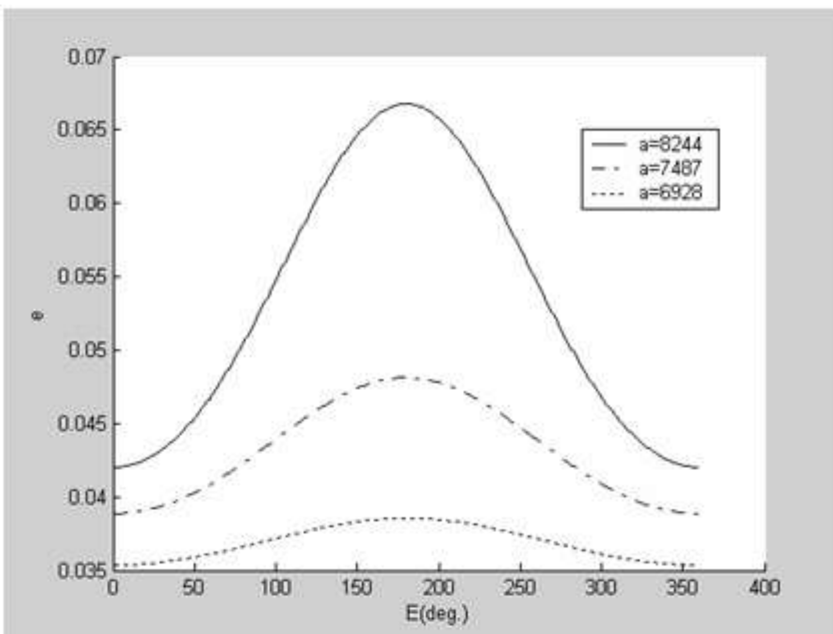
Variables	A	B	C
x_1 (km)	0.0	0.0	٠,٠
x_2 (km)	-4700	−5888.8	−5888.8
x_3 (km)	-4700	-3400	-3400
$\dot{x}_1$ (km/s)	7.9	8	8.3
$\dot{x}_2$ (km/s)	0.0	0.0	0.0
$\dot{x}_3$ (km/s)	0.0	0.0	0.0
a(km)	6928.86	7487.49	8244.83
e	٠,٠٤	0.09	0.17

تم تعويض الشروط الابتدائية أدناه التي تتمثل بالمسافة والسرعة في المحاور (x, y, z) وكذلك السرعة في المحاور الثلاثة والقيمة الابتدائية لنصف المحور الكبير والانحراف المركزي فكانت كالآتي
تم حساب المعاملان β,α بالاعتماد على المعادلتين(8),(9) وذلك بعمل برنامج بلغة MATLAB ولثلاث شروط ابتدائية ومن خلال المعاملان أعلاه تم إيجاد السرعة والمسافة النصف قطرية وكانت قيم كل من μ ، J_2 $398600.8\ km^3.s^{-2}$, 1.0826157×10^{-3}.

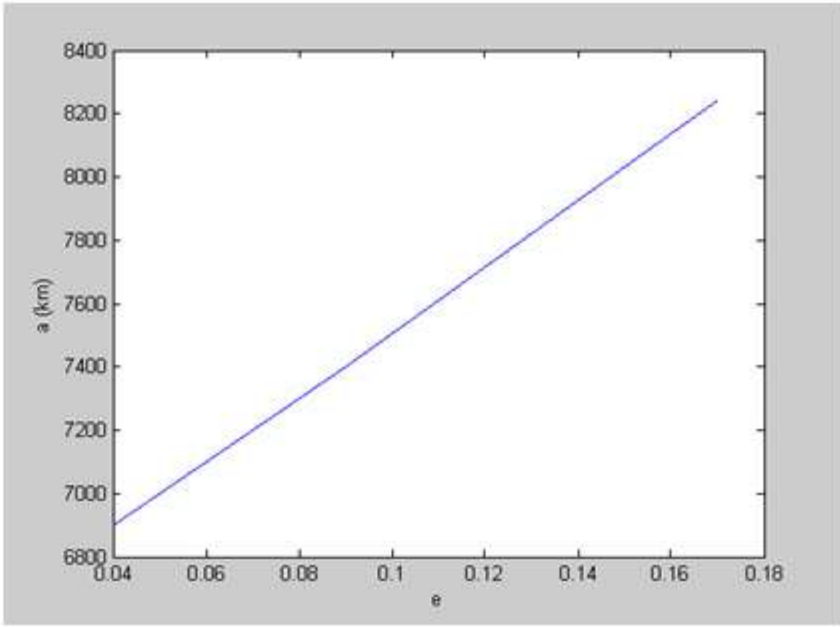


الشكل(١) يمثل العلاقة بين نصف المحور الكبير a(km) وزاوية الانحراف الشاذ (E) ولثلاث شروط ابتدائية

تم من خلال البرمجة لمعادلات حركة الأقمار الاصطناعية استخدام الحل التحليلي، ففي البدء فككت المعادلات يدويا ثم نقلت خطوة خطوة إلى البرنامج الذي تم من خلاله حساب قيمة نصف المحور الكبير والانحراف المركزي ولدورة واحدة . حسبت قيمة a لشروط ابتدائية للحالة A فلوحظ الزيادة التدريجية على شكل منحني في قيمة a ثم النزول التدريجي وصولا إلى نقطة البدء. إن التفسير الفيزيائي للزيادة في قيم نصف المحور الكبير هو عدم انتظام جهد الجاذبية الأرضية في المناطق التي يمر فوقها القمر الاصطناعي والعامل الذي يصف عدم الانتظام هذا هو التوافقية الموقعية J_2 ، في الحالة B اختلفت الشروط الابتدائية بزيادة في قيمة الانحراف المركزي فوجد أن هناك زيادة في قيمة a في بداية المنحني فكانت 6800 km بعد أن كانت في الحالة الأولى 6650 km كما مبين في الشكل (١) . تم تعزيز هذه الحالة بأخذ قيمة للانحراف كبيرة نسبيا وهي ٠,١٧ في الحالة C فكانت أيضا الزيادة حاضرة في بداية المنحني الذي يبين العلاقة بين نصف المحور الكبير وزاوية الانحراف الشاذ ثم الزيادة التدريجية ثم الرجوع إلى النقطة التي ابتدأ القمر الاصطناعي الانطلاق منها ، من كل هذا تتضح العلاقة الخطية تقريبا بين نصف المحور الكبير والانحراف المركزي للمدار . الشكل (٢) يوضح العلاقة بين الانحراف المركزي وزاوية الانحراف الشاذ حيث كانت الزيادة حاضرة لكل قيمة من قيم نصف المحور الكبير (٦٩٢٨، ٧٤٧٨، ٨٢٤٤) على التوالي وهو ما يعزز النتيجة المبينة في الشكل رقم (٣) للعلاقة بين نصف المحور الكبير والانحراف المركزي وهي علاقة خطية وطردية .



الشكل (٢) يمثل العلاقة بين الانحراف المركزي (e) وزاوية الانحراف الشاذ (E) ولثلاث شروط ابتدائية



الشكل (٣) العلاقة بين نصف المحور الكبير a(km) والانحراف المركزي e

المصادر

٢.هيثم نوري، " مدخل إلى جيوديزيا الأقمـــــار الاصطناعية "، الدار العربيــة للعلــوم ، لبنان ، ١٩٩٧.

References

1.Kristin, L.Makovec, "A nonlinear Magnetic Controller for Three-axis Stability of Nanosatellite Theory", M.Sc. Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2001.

3.Sharma, R.K., "Analytical integration K-S elements equations with J_2 for Short-time Orbit predictions", planet space sci.,vol.45,No.11, pp 1481-1486, 1997.

4.Montenbruck, oli. and Pfleger, T.,"Astronomy on The personal Computer",2nd edition,Springer-Verlag,Berlin-Heidelberg, Germany,2000.

5.Stiefel, E.L. and G. Scheifele, "Linear and Regular Celestial Mechanics"springer-verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

6.Sharma, R.K, and RAJ, M., "Analytical Short-Term Orbit Predictions with J_2 to J_6 in Terms of K-S Element Equations", J. pure. App. math., vol. 28(9), 1155-1175, 1997.

7.Sharma, R.K., "Analytical Short-time Orbit Predictions with J_3 J_4 Terms of KS Elements", Celestial Mechanics and numerical astronomy vol.56, pp.503-521, 1993.

8.Sharma, R.K., "Contraction of high eccentricity satellite orbits using ks elements in an oblate atmosphere", Adv.Space Res.Vol.23,No.4,pp. 693-698, 1999.

Abstract

In this paper the analytic solution for equation of the satellite motion is used to find the Dimension elements for the orbit represented by Semi-major axis and eccentricity, this is done by the effect of the second harmonic J_2 of short term orbit for three initial conditions it is seen from it that the increasing in the eccentricity associated with increasing of semi major axis, which proved that the linear relationship between them. These factors have been calculated using K-S theory which summarized in calculating the coefficients resulted from analytical integral for differential equation using coefficients called K-S. Kustaanheimo-Stiefel theorem is summarized in estimation the coefficients resulted from the solution of the ordinary differential equation. The procedure is shown in two steps: firstly, the calculation of the initial conditions according to their relation with the distances and velocity of the satellite. Secondly, the analytical solution is achieved to finding these coefficients ($\alpha,\beta,\lambda,\lambda^*$).