الترقيم الدولي ٨٦٩٠ - ١٩٩١ ISSN 1991- 8690
Email: utjsci@utq.edu.iq Website: http://jsci.utq.edu.iq

صياغة وحل نماذج البرمجة الكسرية الخطية باستخدام طريقة لاكرانج المطورة

رشيد بشير رحيمه

جامعة ذي قار – كلية الإدارة والاقتصاد – قسم الإحصاء

الخلاصة

تم في هذا البحث استخدام طريقة لاكرانج لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية وتطويرها وذلك من خلال إيجاد صيغ رياضية يمكن بواسطتها إيجاد الحل مباشرة دون استخدام الاشتقاقات التفاضلية المعقدة ، الأمر الذي أدى إلى تقليل احتمالات تصفير بعض المتغيرات وكذلك سهولة العمليات الحسابية مما أدى إلى الوصول إلى الحل الأمثل بأسرع وقت ممكن . وتم برمجة طريقة لاكرانج وطريقة لاكرانج المطورة بلغة فيجوال بيسك للحصول على واجهات عرض جيدة عند حل مسائل البرمجة الكسرية وهذا يساعد متخذ القرار على إيجاد الحل الأمثل للمشكلة بأسلوب مطور مبرمج بلغة متقدمة ومن أهم لغات العصر البرمجية .

المقدمة :

يشهد العصر الحالي تطورات سريعة سواء على مستوى المؤسسات التصنيعية أو الخدمية مما يتطلب العمل بمفاهيم إدارية معاصرة والعمل بأساليب علمية وطرائق متطورة مما يجعل التركيز على بحوث العمليات المحوسبة ،وصولا إلى تحقيق عامل السرعة في الحصول على المعلومات الممهدة لعملية اتخاذ القرار فضلا عن الاستخدام الأمثل للموارد المتاحة . [1],[5] .

وتعد البرمجة الخطية إحدى أساليب بحوث العمليات و تتألف معظم مسائل البرمجة الخطية من نموذج رياضي يتكون من دالة هدف خطية ومجموعة قيود خطية يراد إيجاد الحل الأمثل لدالة الهدف محققاً بذلك جميع قيود المسألة بمتغيرات غير سالبة.

عندما تكون دالة الهدف نسبة بين دالتين خطيتين وقيودها خطية تدعى المسائل حينئذ بمسائل البرمجة الكسرية الخطية وهي من المواضيع المهمة في بحوث العمليات[6],[13] .

في عام 1985 اوجد كل من (J.P. Crouzeix, J.A. Ferland and S. Schaible) حل مسائل البرمجة الكسرية الخطية باستخدام طريقة مطورة ،[7] . استخدم (S. Hashizume, M. Fukushima, N. Katoh and T. Ibaraki) في عام 1987 خوارزمية التقريب لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية،[12] . درس كل من (.A

(Cambini, E. Castagnoli, L. Martein, P. Mazzoleni and S. Schaible في عام 1990 بعض التطبيقات الاقتصادية باستخدام نماذج البرمجة الكسرية [6]. في عام 1994درس (M. Gugat) البرمجة الكسرية نصف اللانهائية ،[11] .

اقترح كل من (R.W. Freund and F. Jarre,) في عام 1995 طريقة مطورة هي طريقة النقطة الداخلية (interior-point method) لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية،[10] .

ناقش كل من (H.C. Lai, J.C. Liu and K. Tanaka) في عام 1999 الشرط الضروري والكافي لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية،[15] . في عام 2000 تمكن(H.C. Lai,) من دراسة مسائل البرمجة الكسرية الخطية في فضاء-(L, ρ,θ)، [17] . حاول (H.C. Lai and J.C. Liu,) في عام 2000 تعميم البرمجة الكسرية على مجموعة من الدوال المحدبة،[18] .

تمكن (H.C. Lai. J.C. Lee and J.C. Liu,) في عام 2001 من دراسة المسألة الثنائية في البرمجة العقدية الكسرية،[14] . درس كل من (Z.A. Liang, H.X. Huang and P.M. Pardalos,) في عام 2001 شروط الامثلية والمسألة الثنائية في البرمجة الكسرية غير الخطية ،[16] . استخدم كل من (H.C. Lai and J.C. Liu,) في عام2002 دوال(*quasi/pseudo*) لدراسة مسائل البرمجة الكسرية العقدية ،[19] . قدمت (أفراح يحيى محمد) عام٢٠٠٤ دراسة إحصائية لمقياس التنمية البشرية باستخدام نماذج البرمجة الكسرية في [3]. اوجد (محمد صالح) عام ٢٠٠٥ التركيب المحصولي الأمثل في مصر والذي يعظم صافي عائد الربح للمتر المكعب من المياه باستخدام البرمجة الكسرية غير الخطية [٤]. طبق كل من (Fuye Feng Yong Xia, و Quanju Zhang) في عام ٢٠٠٦ اسلوب البرمجة الكسرية في الشبكات العصبية ،[8] .

ناقش كل من (A. Mehra S. Chandra, و C. R. Bector) في عام ٢٠٠٧ الامثلية في البرمجة الكسرية الخطية ذات المعاملات الضبابية،[20] . اوجد كل من (عباس احمد حسن ، اسراء هادي حسن) عام ٢٠٠٨ الحل العددي الأمثل لمسائل البرمجة الكسرية[٢]. اقترح كل من

(Fengqi You, Pedro M. Castro, Ignacio E. Grossmann) عام ٢٠٠٩ طريقة مطورة هي (Dinkelbach's algorithm) لإيجاد الحل العددي الأمثل لمسائل البرمجة الكسرية [9] .

تم في هذا البحث استخدام طريقة لاكرانج وتطويرها لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية.

١- طريقة مضروبات لاكرانج لحل مسائل البرمجة الكسرية

لعل من المفيد في أغلب مسائل البرمجة الخطية واللاخطية والكسرية الحصول على قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) لدالة الهدف وفقا لمجموعة من القيود أو الشروط ألإضافية . أن طريقة مضروبات لاكرانج بإمكانها تحقيق ذلك حيث تستخدم الطريقة دالة هدف ومجموعة معينة من القيود لتكوّن دالة جديدة تدعى بدالة لاكرانج ، وتجري على هذه الدالة عدة اشتقاقات تفاضلية تكون طويلة في أغلب ألأحيان للحصول على مجموعة معادلات بواسطتها يمكن الوصول إلى حل أو مجموعة من الحلول يكون الحل ألأمثل من ضمنها . [7] ، [13] .

(وسيتم هنا حل مسائل البرمجة الكسرية بطريقة لاكرانج) ولما كان الكثير من مسائل البرمجة اللاخطية في حلها الكثير من الغموض والتعقيد سواء كان الحل بطريقة لاكرانج أو غيرها ، لذا نحاول تطوير حل مسائل البرمجة الكسرية بطريقة لاكرانج لنستخرج من معادلات الحل مجموعة من العلاقات والصيغ توصلنا مباشرة إلى الحل بدون

الخوض بتكوين دالة لاكرانج واشتقاقاتها التفاضلية المطولة والتي قد نكون مضطرين لاستخراجها في مسائل البرمجة أللاخطية ، سوف نختزل كذلك احتمالات الحل من أجل الوصول إلى الحل ألأمثل باحتمالات أقل ووقت أسرع وسنرى ذلك واضحا بعد تطوير هذه الطريقة في حين سنتناول هنا استخدام طريقة لاكرانج واشتقاقاتها التفاضلية المتعددة لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية بشكلها ألاعتيادي من أجل الوصول إلى الحل ألأمثل .

1.1– أيجاد الحل ألأمثل لمسائل البرمجة الكسرية بطريقة لاكرانج

تعتبر البرمجة الكسرية الخطية حالة خاصة من البرمجة اللاخطية فما ينطبق من الحلول لحل مسائل البرمجة اللاخطية يمكن تطبيقه لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية لكن العكس غير صحيح . أن طرائق حل مسائل البرمجة اللاخطية كثيرة منها طريقة ألاتجاهات الممكنة وطريقة الدوال الجزائية وطريقة نيوتن – رافسون وطريقة مضروبات لاكرانج وطرائق أخرى عديدة ولعل أكثر الطرائق شيوعا وأستعمالا هي طريقة مضروبات لاكرانج وأن أكثر الطرائق التي لها قابلية التعميم هي طريقة كوهن – توكر التي تعتبر توسيعا لطريقة مضروبات لاكرانج وسنستخدم هذه الطريقة لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية

فإذا عبرنا عن مسألة البرمجة الكسرية بالنموذج الرياضي الأتي:–

$$\text{Max } Z=\frac{CX+\alpha}{DX+\beta} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1.1)$$

$$\text{S. t.} \quad AX\le B$$
$$X \ge 0$$

حيث أن:

X: تمثل متغيرات النموذج الرياضي .

α : تمثل الحد المطلق في دالة البسط

β : تمثل الحد المطلق في دالة المقام

A: مصفوفة المعاملات للقيود

B : مصفوفة ثوابت الطرف الأيمن للقيود

1-1.1. خطوات حل مسائل البرمجة الكسرية [٢]

– نجزئ دالة الهدف الكسرية إلى دالتين خطية تمثل الأولى دالة البسط والثانية دالة المقام، ولكي تكون قيمة دالة الهدف أعظم مايمكن يجب أن تكون دالة البسط أكبر مايمكن

($MaxZ_1$) بينما تكون دالة المقام أقل مايمكن($MinZ_2$).

٢– يتم استخراج دالة ($MaxZ^*$) من حاصل جمع دالة المقام بعد تحويلها إلى ($MaxZ_2$) مع دالة البسط ($MaxZ_1$) ،ثم توضع هذه الدالة في نموذج رياضي مكون من قيود المسألة الأصلية بالإضافة إلى شروط عدم السلبية ،ولحل مسألة البرمجة الخطية الناتجة نذهب للخطوة التالية .

٣ – يمكن حل النموذج الخطي الجديد بالطريقة المبسطة (simplex method) ونظرا لكثرة جداول الحل وما يرافقها من عمليات حسابية معقدة سنستخدم طريقة لاكرانج في الحل

ولكون قيود المسائل المراد حلها قد تحمل علامة المساواة أو قد تحمل علامة اللامساواة لذا سنتناول دراسة الحالتين كالأتي :

أ- عندما تحمل القيود علامة المساواة (Equality constraints)

لنفرض أن لدينا النموذج الرياضي ألأتي والذي تم الحصول عليه من نموذج البرمجة الكسرية **(1.1)** باستخدام الخطوات أعلاه

$$MaxZ^* = f(x)$$

$$\text{S.t.} \quad g_1(x)=b_1$$
$$\vdots$$
$$g_m(x)=b_m$$

حيث أن $f(x)$ و $g_i(x)$, $(i=1,2,\ldots,m)$ بشكل عام دوال لا خطية مستمرة قابلة للاشتقاق لكننا سنستخدم الحل لاحقا لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية وأن

، $m \le n$ و x غير مشروط بشروط اللاسلبية $(X \ge 0)$.

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$$

أن الدالة:

$$L(x,\lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [g_i(x) - b_i] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

تدعى دالة لاكرانج

وأن المعلمات $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_m)'$ تسمى مضروبات لاكرانج

وأن الشروط الضرورية للحصول على الحل ألأمثل هي

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

وبذلك سيكون لدينا (n+m) من المتغيرات و (n+m) من المعادلات ولذلك يمكن حل هذه المعادلات آنيا لإيجاد الحل لمجموعة المعادلات هذه . أن مصفوفة هيسين تحدد لنا الشرط الكافي لامتلاك الدالة قيمة عظمى أو قيمة صغرى وفي حالة البرمجة الخطية ستحول مصفوفة هيسين H إلى نقطة واحدة تمثل المشتقة الثانية وأن المصفوفة H^B(Bordered Hessian matrix) المعرفة أدناه بإمكانها أن تحدد الشرط الكافي لإيجاد الحل ألأمثل كالأتي :

$$H^B = \begin{pmatrix} O & : & P \\ .. & .. & .. \\ P' & : & Q \end{pmatrix}$$

حيث أن P,Q مصفوفتان معرفتان كالأتي :

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dfrac{\partial g_m(x)}{\partial x_j} \end{pmatrix}_{m\times n} ، \quad Q = \left(\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{m\times n} ، \qquad j=1,2,\ldots,n \quad , \ i=1,2,\ldots,n$$

تسمى H^B مصفوفة (Bordered Hessian matrix) حيث ستكون x_0 نقطة تعظيم أذا كانت آخر المحيددات الرئيسية (n-m) إلى H^B تحمل الإشارة $(-1)^{m+1}$ أو تكون x_0 نقطة تصغير أذا كانت آخر المحيددات الرئيسية (n-m) تحمل الإشارة $(-1)^m$. **[١٣]**

ب – عندما تحمل القيود علامة اللامساواة (Inequality constraints)

لحل المسائل التي تحمل قيودها علامة اللامساواة بطريقة مضروبات لاكرانج لابد لنا قبل تكوين دالة لاكرانج من تحويل متراجحات القيود إلى معادلات وذلك يتطلب منا إضافة أو طرح مقادير مجهولة من كل قيد مما سيزيد عدد مجاهيل المسألة فيزيد من صعوبة حلها وللتخلص من هذه المشكلة نستخدم طريقة شروط كوهن – توكر التي تعتبر توسيعا أو تطويراً لطريقة لاكرانج حيث تستخدم هذه الطريقة شروطا نصفر بواسطتها بعض المتغيرات من أجل جعل عدد متغيرات المسألة مساويا لعدد المعادلات و حل نظام المعادلات المتكون والوصول من خلال ذلك إلى مجموعة حلول يكون من ضمنها الحل ألأمثل للمسألة وسنوضح هذه الطريقة في البند ألآتي :

1.2– توسيع طريقة مضروبات لاكرانج (أو ما يسمى بطريقة شروط كوهن – توكر)

سنوضح في هذا البند كيفية استخدام طريقة مضروبات لاكرانج عندما تحمل قيود المسألة علامة اللامساواة للحصول على الشروط الضرورية حيث تستخدم هذه الطريقة شروط اللاسلبية $-x \le 0$ بدلا من $x \ge 0$ إضافة إلى شروط أخرى من أجل تصفير بعض المتغيرات ، لذلك سيكون النموذج الذي ستستخدمه طريقة لاكرانج الموسعة أو ما يسمى بطريقة شروط كوهن – توكر كالأتي :

$$
\left.
\begin{array}{llll}
\text{Max}Z^* = f(x) & & & \\
\text{Sub. to :} & g_1(x) & \le & b_1 \\
 & \vdots & & \vdots \\
 & \vdots & & \vdots \\
 & g_m(x) & \le & b_m \\
 & -x_1 & \le & 0 \\
 & \vdots & & \vdots \\
 & \vdots & & \vdots \\
 & -x_n & \le & 0
\end{array}
\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.2)
$$

والذي تم الحصول عليه من النموذج (١.١) باستخدام الخطوات السابقة . ولتحويل جميع متراجحات القيود إلى معادلات سيكون لدينا النموذج الأتي :

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\text{Max}Z^* = f(x) & \\
\text{Sub. to} & \\
g_1(x)-b_1+w_1^2 & =0 \\
\vdots & \\
\vdots & \\
g_m(x)-b_m \qquad +w_m^2 & =0 \\
\qquad -x_1+h_1^2 & =0 \\
\qquad \vdots & \\
\qquad \vdots & \\
\qquad -x_n+ \qquad h_n^2 & =0
\end{array}
\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1.3)
$$

ولضمان أن يكون المتغير المهمل s_i موجبا سنفرض ($s_i=w_i^2$)حيث أن $(i=1, 2, \ldots, m)$ وأن $(s_j=h_j^2)$ حيث أن $(j=1, 2, \ldots,n)$. فأن دالة لاكرانج ستكون كالأتي:

$$L(x,\lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(x) - b_i + w_i^2) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j+m}(-x_j + h_j^2) \quad \ldots\ldots\ldots (1.4)$$

حيث أن λ_i , λ_{i+m} تمثل مضروبات لاكرانج وهي موجبة في حالة التعظيم سالبة في حالة التصغير ولحل النموذج الخطي (أو اللاخطي بشكل عام) نتبع الأتي :-

نجد شروط كوهن – توكرالضرورية وكما يلي :

-1 $\dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0$, (j=1, 2,..., n) ,

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} + \lambda_{j+m} = 0 \quad , \ldots\ldots (1.5)$$

-2 $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0$, (i=1, 2,... , m)

$$g_i(x) - b_i + w_i^2 = 0 \quad \ldots\ldots (1.6)$$

حيث أن $w_i^2=s_i$

-3 $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_{j+m}} = 0$, (j=1,2,...,n) ,

أذن

$$x_j - h_j^2 = 0,\ x_j = h_j^2$$

-4 $\dfrac{\partial L}{\partial w_i} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial w_i} = -2\lambda_i w_i = 0$$

$$\lambda_i w_i = 0$$

$$\lambda_i w_i^2 = 0$$

$$\lambda_i s_i = 0 \ldots\ldots (1.7)$$

– 5 $\dfrac{\partial L}{\partial h_j} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial h_j} = -2\lambda_{j+m} h_j = 0$$

$$\lambda_{j+m} h_j = 0$$

$$\lambda_{j+m} h_j^2 = 0$$

$$\lambda_{j+m} x_j = 0 \ldots\ldots (1.8)$$

ولحل النموذج (2.1) فأن جعل الدالة تكون في حالة التعظيم هو لأن مصفوفة هيسين المحددة أو شبه المحددة بالسالب في مسائل البرمجة اللاخطية وهذا يماثل كون المشتقة الثانية لدالة الهدف سالبة في مسائل البرمجة الخطية، وأن حل المعادلات (1.5) و(1.6) و(1.7) و(1.8) سيعطي الحل ألأمثل للنظام السابق. أن تحقيق شروط كون – توكر التي تتلخص بتحقيق المعادلة (1.7) ، أي أن أحد هذين المتغيرين λ_i أو s_i يساوي صفر ،أو بتعبير أخر أن أحدهما يدخل الحلول ألأساسية والأخر سيكون خارجا منها ، وكذلك الحالة نفسها بالنسبة للمعادلة (1.8) .

غالبا ما تطبق شروط كوهن– توكر على نماذج البرمجة اللاخطية التي يصعب أيجاد الحل لها، لكننا سنطبق هذه الطريقة على مسائل البرمجة الكسرية الخطية لنتمكن لاحقا من أيجاد الصيغ أو القوانين التي تمكننا من الوصول إلى الحل مباشرة دون الحاجة إلى تكوين دالة لاكرانج أجراء ألاشتقاقات التفاضلية الطويلة ، كما أننا سنحاول تقليل احتمالات تصفير الحل من أجل الوصول إلى الحل ألأمثل و بوقت أسرع .

أمثلة توضيحية

<u>مثال –(1.1)</u> :

$$Max\quad Z=\frac{3x_1+4x_2+1}{x_1+x_2+1}$$
$$Sub.to:\quad 2x_1+x_2\le 50$$
$$x_1,x_2\ge 0$$

يتم تحويل النموذج ألكسري كالأتي :

لكي تكون قيمة دالة الهدف أعظم ما يمكن يجب أن يكون البسط أكبر مايمكن والمقام أقل مايمكن حسب خطوات حل مسائل البرمجة الكسرية كالأتي:

$$Max\ z_1=3x_1+4x_2+1$$
$$Min\ z_2=x_1+x_2+1$$

يتم تحويل النموذج ألكسري كالأتي :

لكي تكون قيمة دالة الهدف أعظم ما يمكن يجب أن يكون البسط أكبر مايمكن والمقام أقل مايمكن حسب خطوات حل مسائل البرمجة الكسرية كالأتي:

<u>الحل</u> :

يتم تحويل النموذج ألكسري كالأتي :

لكي تكون قيمة دالة الهدف أعظم ما يمكن يجب أن يكون البسط أكبر مايمكن والمقام أقل مايمكن حسب خطوات حل مسائل البرمجة الكسرية كالأتي:

$$Max\ z_1=3x_1+4x_2+1$$
$$Min\ z_2=x_1+x_2+1$$

وبتحويل دالة $Min\ z_2$ إلى $(Max\ z_2)$ نحصل على $Max\ z_2=-x_1-x_2-1$

وبجمع دالة المقام مع دالة البسط نستخرج $MaxZ^*$ كما مبين أدناه

$$MaxZ^*=2x_1+3x_2$$
$$Sub.\ to:\ 2x_1+x_2\le 50$$
$$x_1,x_2\ge 0$$

بتحويل متراجحة القيد إلى معادلة وإضافة شروط أللاسلبية لكوهن– توكر سيكون لدينا ألأتي:

$$MaxZ^* = 2x_1+3x_2$$

$$\text{Sub. to : } 2x_1+x_2+x_3^2-50 = 0$$

$$-x_1+x_4^2 = 0$$

$$-x_2+x_5^2 = 0$$

وتكون دالة لاكرانج كالأتي:

$$L(x,\lambda) = 2x_1 + 3x_2 - \lambda_1(2x_1 + x_2 + x_3^2 - 50) - \lambda_2(-x_1 + x_4^2) - \lambda_3(-x_2 + x_5^2)$$

حيث أن $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ تمثل مضروبات لاكرانج .

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 3 - \lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\lambda_1 - \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 3 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.1.1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = -2x_3\lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_4} = -2x_4\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_5} = -2x_5\lambda_3 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x_3\lambda_1 = 0 \\ x_4\lambda_2 = 0 \\ x_5\lambda_3 = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.1.2)$$

$$2x_1 + x_2 + x^2{}_3 = 50 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.1.3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -(-x_1 + x_4^2) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = -(-x_2 + x_5^2) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_4^2 \\ x_2 &= x_5^2 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.1.4)$$

ومن المعادلة (1.1.2) نحصل على

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 s_1 &= 0 \\ \lambda_2 x_4^2 &= 0 \\ \lambda_3 x_5^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.1.5)$$

وبتعويض المعادلة (1.1.4) في المعادلة (1.1.5) نحصل على

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 s_1 &= 0 \\ \lambda_2 x_1 &= 0 \\ \lambda_3 x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.1.6)$$

حيث أن متغيرات كل من (1.1.6) تسمى بالمتغيرات المتتامة أي أن λ_1 متممة s_1 وأن λ_2 متممة x_1 و λ_3 متممة x_2 والعكس صحيح . من المعادلات (1.1.1) و (1.1.3) نحصل على

$$\left.\begin{aligned} 2\lambda_1 - \lambda_2 &= 2 \\ \lambda_1 - \lambda_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + s_1 &= 50 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.1.7)$$

ولما كان عدد المتغيرات(6) وعدد المجاهيل (3) فلابد من تصفير (3) متغيرات من أجل الحصول على حل لهذه المعادلات ، ولما كان عدد معادلات (1.1.6) هو (3) وعدد المتغيرات في كل معادلة هو (2) لذا فأن احتمالية التصفير لهذه المتغيرات هو $2^3 = 8$ والجدول الأتي يمثل عدد الطرائق الممكنة لتصفير المتغيرات

جدول (2.1.1)

It.	λ_1	λ_2	λ_3	x_1	x_2	s_1
1	0	0	0			
2	0	0		0		
3	0		0		0	
4	0			0	0	
5		0	0			0
6		0		0		0
7			0		0	0
8				0	0	0

وبحل معادلات (1.1.7) واستخدام الجدول (1.1.1) سنحصل على الحل ألأمثل ألأتي:

$x_1^* = 0 \;, \quad x_2^* = 50 \quad , \quad \text{Max } z = 3.941$

وهذا الحل مطابق لحل المسألة نفسها بطريقة السمبلكس . **[١٣]**

٢ – تطوير طريقة لاكرانج لحل مسائل البرمجة الكسرية

٢.١ المقدمة

لاحظنا عند حلنا لمسائل البرمجة الكسرية الخطية بطريقة مضروبات لاكرانج في البند السابق أن الحل يستدعي في البداية تكوين دالة لاكرانج ثم أجراء اشتقاقات تفاضلية متعددة من أجل الحصول على مجموعة من المعادلات التي يمكن بواسطتها الوصول إلى حل أو مجموعة من الحلول يكون الحل ألأمثل من ضمنها . ألا أننا هنا سنحاول تطوير حل مسائل البرمجة الكسرية بطريقة لاكرانج حيث نستطيع أن نستخرج من اشتقاقات تفاضلية للحل مجموعة من القوانين والصيغ التي نستطيع بواسطتها التوصل مباشرة إلى مجموعة معادلات بحلها يمكن الوصول الى الحل بدون الخوض بخطوات تشكيل دالة لاكرانج أو اشتقاقاتها المطولة وسنختزل كذلك طرق التصفير العديدة الممكنة لتصفير بعض المتغيرات من أجل الوصول إلى الحل ألأمثل باحتمالات أقل ووقت أسرع ساعد في ذلك الخاصية الخطية للبرمجة الكسرية واسلوب المصفوفات .

لنفرض أن لدينا نموذج البرمجة الكسرية ألأتي(النموذج **(1.1)**في البند السابق) :

$$\text{Max } Z = \frac{CX + \alpha}{DX + \beta} \qquad \text{…………(2.1)}$$

$$\text{sub. to: } AX \le B$$
$$X \ge 0$$

والذي يمكن تحويله باستخدام الخطوات السابقة إلى النموذج الأتي :

$$\left.\begin{array}{l} Max\ Z^* = CX \\ \text{sub. to: } AX \le B \\ \qquad X \ge 0 \end{array}\right\} \qquad \text{…………………………………………………….. (2.2)}$$

عند إضافة شروط اللاسلبية لكون – توكر وإضافة المتغيرات المهملة (X^* , X') حيث

$$X_1 = X' = (x_{n+1}^2, \ldots., x_{m+n}^2)'$$
$$X_2 = X^* = (x_{n+m+1}^2, \ldots., x_{m+2n}^2)'$$

سيكون النموذج (2.2) كالأتي

$$\left.\begin{array}{l} Max Z^* = CX \\ \text{Sub. to} \\ AX + I_m X' = B \\ -X + I_n X^* = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.3)$$

وبذلك ستكون دالة لاكرانج كالأتي

$$L(x,\lambda,\lambda^*) = CX - \lambda(AX + I_m X1 - B) - \lambda^*(-X + I_n X_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = C - \lambda A + \lambda^* I_n = 0 \\ \lambda A - \lambda^* I_n = c \\ A'\lambda' - I_n \lambda^{*\prime} = c' \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.4)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(AX + I_m X_1 - B) = 0 \\ AX + I_m X_1 = B \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.5)$$

ولنفرض أن (X'=S) حيث أن

$S=(s_1,s_2,\ldots,s_m)$

وبذلك ستكون المعادلات التي نحصل عليها من اشتقاق دالة لاكرانج كالأتي

$$A'\lambda' - I_n \lambda^{*\prime} = c' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.4)$$

$$AX + I_m S = B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.5)$$

وعليه فعند حل أية مسألة برمجة كسرية لاداع لتكوين دالة لاكرانج ثم أجراء الاشتقاقات عليها أنما يمكن الحصول على المعادلات المستخرجة مباشرة من اشتقاق دالة لاكرانج باستخدام المعادلتين (2.4) و(2.5) . كما موضح في المسألة الآتية:

<u>مثال (2.1)</u> : (المثال ١.١ في البند السابق)

$$Max\ \ Z = \frac{3x_1 + 4x_2 + 1}{x_1 + x_2 + 1}$$

$$Sub.\ to:\ \ 2x_1 + x_2 \le 50$$

$$x_1, x_2 \le 0$$

الحل:

يتم تحويل المسألة كما مر بنا سابقا على وفق خطوات حل مسا ئل البرمجة الكسرية حيث ستكون المسألة بالشكل الأتي :

$MaxZ^* = 2x_1+3x_2$

Sub. to : $2x_1+x_2 \quad \le 50$

$x_1 , x_2 \ge 0$

سنحاول ألان استخدام القوانين (2.4) و(2.5) التي توصلنا إليها من اشتقاق دالة لاكرانج وهي كالأتي :

$$A'\lambda' - I_n\lambda^{*\prime} = C'$$

$$AX + I_m S = B$$

حيث أن $n=2$, $m=1$

$A = (2 \quad 1)$ $\qquad C = (2 \quad 3)$

$B=50$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} ،\quad C' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\quad \lambda = (\lambda_1),\quad \lambda^{*\prime} = \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix},\quad s = s_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\lambda_1 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} ،$$

$$(2 \quad 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (1)s_1 = 50 \quad ,$$

$$\left.\begin{aligned} &2\lambda_1 - \lambda_2 = 2 \\ &\lambda_1 - \lambda_3 = 3 \\ &2x_1 + x_2 + s_1 = 50 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (2.1.1)$$

ان مجموعة معادلات (2.1.1) هي نفس معادلات (1.1.7) نفسها التي تم التوصل إليها سابقا بعد تكوين دالة لاكرانج وأجراء الاشتقاقات العديدة، ولما كان عدد المتغيرات (6) وعدد المعادلات (3) لذا لابد من تصفير (3) متغيرات من أجل التمكن من حل هذه المعادلات وطرق التصفير الممكنة للمتغيرات كما رأينا سابقا هي

$2^{n+m} = 2^3 = 8$

في السابق تم حل طرق التصفير الممكنة للمتغيرات الثمانية ومنها تم التوصل الى الحل ألأمثل ، لكن يمكن تقليص أحتمالات التصفير إلى

$$\binom{n+m}{m} - 1 = \binom{2+1}{1} - 1 = \binom{3}{1} - 1 = \frac{3!}{1!*2!} - 1 = 3 - 1 = 2$$

وبذلك فأن نسبة الحل بعد التقليص مقارنة مع الحل الأصلي هي $\frac{2}{8} \times 100 = 25\%$

أن احتمالية التصفير بشكل عام للجدول المختصر هي

$n=2 \quad , \quad m=1$

I- if $i \le n$

$$\lambda_i = x_i = s_{i-1} = 0$$

II- if $i=n+1$

$$\lambda_i = x_{i-1-j} = s_{i-1-j} = 0$$

$j= 1,\ldots,m,\ i= 2,\ldots,n$

وبذلك سيكون الجدول المختصر كالأتي:

جدول (3.1.1)

ت	λ_1	λ_2	λ_3	x_2	x_1	s_1
1		0		0		0
2			0		0	0

وعند الحل وفق الجدول المختصر فأن الحل الأمثل سيكون

$x_1^* = 0 \quad , \quad x_2^* = 50 \quad , \quad \text{Max } z = 3.941$

أن هذا الحل مطابق لحل المسألة نفسها بطريقة السمبلكس وكذلك مطابق للحل بطريقة لاكرانج قبل اختصار الحل المذكور وقيم مضروبات لاكرانج هي $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 4$

وهذه القيم مطابقة للقيم المتناظرة لقيم الظل في جدول طريقة السمبلكس .

من اجل بيان كفاءة الطريقة المطورة نذكر امثلة توضيحية اخرى لكننا سنكتفي بذكر عدد احتمالات التصفير لكل مثال بالطريقتين الاعتيادية والمطورة عند مقارنة النتائج والامثلة التي نذكرها كالأتي:

مثال ٢

$$Max\ \ z = \frac{10x_1 + 3x_2 + 12}{2x_1 + 5x_2 + 10}$$

s. t.: $6x_1 + x_2 \leq 60$
$x_1 + 3x_2 \leq 80$
$x_1\ ,\ \ x_2 \geq 0$

مثال ٣

$$Max\ \ z = \frac{4x_1 + 3x_2 + 5}{7x_1 + 2x_2 + 6}$$

s. t.: $2x_1 + 5x_2 \leq 55$
$8x_1 + 5x_2 \leq 45$
$5x_1 + 6x_2 \leq 33$
$x_1\ ,\ x_2 \geq 0$

مثال ٤

$$Max\ \ z = \frac{4x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 5}{2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6}$$

s. t.: $2x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 60$
$8x_1 + 5x_2 - 7x_3 \leq 20$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

3- مناقشة النتائج

3.1- إحصائية

كانت حصيلة الحل لجميع الأمثلة السابقة بطريقة لاكرانج ولاكرانج المطورة ممثلة بالجدول الأتي:

المثال	عدد طرق تصفير المتغيرات قبل الاختصار	عدد طرق تصفير المتغيرات بعد الاختصار	نسبة عدد الطرق بعد التقليص
1	8	2	%25
2	16	5	%31
3	32	9	%28
4	32	9	%28

3.2- النتائج المستخلصة

نذكر هنا أهم الملاحظات والاستنتاجات التي تم التوصل إليها من خلال حل مسائل البرمجة الكسرية بطريقة لاكرانج الاعتيادية وطريقة لاكرانج المطورة .

1-تم تطوير طريقة مضروبات لاكرانج الاعتيادية التي كانت تستخدم لحل مسائل البرمجة اللاخطية بحيث تم استخدام هذه الطريقة في هذا البحث لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية

2- إن طريقة لاكرانج المطورة تتضمن صيغ رياضية بسيطة ولا تحتاج إلى الاشتقاقات التفاضلية الطويلة التي كانت تستخدم في طريقة لاكرانج الاعتيادية و أن قيم الظل الموجودة في جدول طريقة مضروبات لاكرانج المطورة هي نفس قيم الظل الموجودة في جدول السمبلكس.

3 – إن تطوير طريقة لاكرانج ساعد في اختزال الوقت من خلال اختزال العمليات الحسابية وطرق التصفير بحيث أصبحت الطريقة المطورة تتضمن جدول طرق تصفير أقل يصل أحياناً إلى أقل من 70% من جدول الحل الأصلي .

4 -أن استخدام طريقة لاكرانج المطورة يتضمن حل معادلات أنية ولا يحتاج إلى استخدام خوارزمية تتطلب الكثير من الحسابات والجداول كما هو عليه في طريقة السمبلكس من اجل الوصول إلى الحل الأمثل .

5-أمكن تجزئة حل معادلات كل طريقة تصفير وارد في جدول طرق التصفير المختصرة إلى جزأين بحيث أذا كانت قيم الجزء الأول سالبة (في حالة Max) فلا داع إلى تكملة حل مجموعة معادلات الجزء الثاني وهذا يختزل الكثير من الحل .

6- برمجة طريقة لاكرانج وطريقة لاكرانج المطورة بلغة فيجول بيسك ساعد متخذ القرار في حل أي مشكلة يمكن صياغتها كمسألة برمجة كسرية وعرض متغيرات المسألة وجداول الحل لها بطريقة أكثر ترتيب .

المصادر

1– إسماعيل ،احمد عبد الجبار، التميمي، ماجدة عبد اللطيف ،" بحوث العمليات تطبيقات على الحاسوب " ،الطبعة الاولى ، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان ، الأردن،(٢٠٠٧) .

٢ – حسن ،عباس احمد، حسن ، إسراء هادي ، " استخدام خوارزمية طريقة تطوير مولد قطع المستوي لإيجاد الحل العددي لمسائل البرمجة الكسرية "، مجلة الهندسة والتكنولوجيا،المجلد ٢٦، العدد٤، (٢٠٠٨).

٣ – محمد ،أفراح يحيى ،" دراسة إحصائية لمقياس التنمية البشرية "، رسالة دكتوراه ، الجمهورية اليمنية المركز الوطني للمعلومات ،(٢٠٠٤) .

٤ – صالح ،محمد،" التركيب المحصولي المصري الأمثل باستخدام البرمجة الكسرية غير الخطية " ، مجلة تقنية المعلومات المصرية ، المجلد السادس ،العدد الأول ،(٢٠٠٥).

٥- ذياب ،آوس نضال ،" تحسين طريقة لاكرانج لحل مسائل البرمجة الخطية"، رسالة ماجستير ،قسم العلوم التطبيقية ،الجامعة التكنولوجية(٢٠٠٨).

6-Cambini A., Castagnoli E., Martein L., Mazzoleni P. and Schaible S., Generalized Convexity and Fractional Programming with Economic Applications. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 345, Springer, Berlin, (1990).

7-Crouzeix J.P., . Ferland J.A and Schaible S., An algorithm for generalized fractional programs Journal of Optimization Theory and Applications vol., 47, no. 1, pp.35-49 , (1985) .

8-Feng F., Xia Y. و Zhang Q. ," A Recurrent Neural Network for Linear Fractional Programming with Bound Constraints",(2006)

9- Fengqi Y., Pedro M. C., Ignacio E. G. , "Dinkelbach's algorithm as an efficient method to solve a class of MINLP models for large-scale cyclic scheduling problems",Computers and Chemical Engineering ,vol.33,pp. 1879–1889, (2009).

10-Freund R.W. and Jarre F., An interior-point method for multifractional programs with convex constraints, Journal of Optimization Theory and Applications,vol. 85, no. 1, 125-161, (1995).

11-Gugat M., Fractional Semi-infinite Programming, Doctoral Dissertation, University of Trier, (1994).

12-Hashizume S., Fukushima M., Katoh N. and Ibaraki T., Approximation algorithms for combinatorial fractional programming problems,Mathematical Programming,vol. 37, no. 3,pp. 255-267, (1987).

13-Hamdy A.T.," operations research an introduction " seventh ed. Canada ,by Maxwell publishing company ,(2004) .

14-Lai H.C., Lee J.C. and Liu J.C., Duality for fractional complex programming with generalized convexity, Journal of Nonlinear and Convex Analysis ,vol.2, no. 2, pp.175-191, (2001).

١5-Lai H.C., Liu J.C. and Tanaka K., Necessary and sufficient conditions for minimax fractional programming, Journal of Mathematical Analysis and Applications,vol. 230, no. 2,pp. 311-328, (1999).

16-Liang Z.A., Huang H.X. and Pardalos P.M., Optimality conditions and duality for a class of nonlinear fractional programming problems,Journal of Optimization Theory and Applications ,vol.110, no. 3, 611-619., (2001)

17-Lai H.C., Complex fractional programming involving (L, ρ,θ)-convex analytic functions, In: H.G.W. Begehr, R.P. Gilbert and J. Kajiwara (eds.),Proceedings of the Second ISAAC Congress, Vol. 2, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp.1447-1457, (2000).

18-Lai H.C. and Liu J.C., On minimax fractional programming of generalized convex set functions, Journal of Mathematical Analysis and Applications vol. 244, no. 2,pp. 442-465, (2000).

19-Lai H.C. and Liu J.C., Complex fractional programming involving generalized quasi/pseudo convex functions, Journal of Applied Mathematics and Mechanics vol. 82, no. 3, pp.159-166, (2002).

20- Mehra A. , Chandra S. و Bector C. R. ," Acceptable optimality in linear fractional programming with fuzzy coefficients",Fuzzy Optimization and Decision Making,Vol. 6, no. 1,pp. 5-16, (2007).

Formulation and Solving Fractional linear programming Models Using Development of Lagrange s' Method

Rasheed Basheer Reheima

University of Thi Qar

Abstract

In this paper Lagrange's method was used to solve Fractional linear programming problems and then developed this method by using mathematical forms by which it can be possible to find the solution without using complex derivations. Thus we can avoid a lot of derivations and summarize the number of probabilities of eradicating some of the changeable items which had rapidly got to the optimal solution . The research also includes programs written with Visual Basic language (Microsoft Visual Basic 6.0), represented the Lagrange's method and development Lagrange's method to get agood forms and solution of Fractional linear programming problems , to help decision maker to find optimal solution of this problems by development manner with advanced language and important present programming languages .

E-mail :rasheedbasher@yahoo.com