الترقيم الدولي ٨٦٩٠ - ١٩٩١ ISSN 1991- 8690
Email: utjsci@utq.edu.iq website: http://jsci.utq.edu.iq

حل مسائل البرمجة الهدفية الخطية باستخدام المصفوفات

رشيد بشير رحيمه

كلية العلوم - جامعة ذي قار

الخلاصة:

الطريقة التقليدية هي احدى الطرائق الشائعة في بحوث العمليات لحل مسائل البرمجة الهدفية الخطية , حيث تعتمد هذه الطريقه في الحل على اسلوب تحويل متغيرات الانحراف كفرق بين متغيرين غير سالبين ثم تعوض في دالة الانجاز والاهداف وتحل بعد ذلك المسألة بطرق حل مسائل البرمجة الخطية. هدف البحث هواستخدام اسلوب مطور يعتمد على المصفوفات لحل مسائل البرمجة الهدفية في السمبلكس بدلآ من الطريقة الجدولية .

وجد من خلال البحث ان الاسلوب المطورالجديد افضل من الطريقة التقليدية لأنه قلص جداول الحل الامثل لمسألة البرمجة الهدفية وسهل العمليات الحسابية مما ادى الى تقليل الوقت اللازم للحل .

المقدمة:

بدأت طرق الامثلية بدراسة مشاكل القرار التي تتضمن معيارآ واحدآ لقياس الاداء وتحديد الحل الامثل . اذ ان معظم حالات القرار الحقيقية سواء كانت شخصية ام وظيفية تمتاز بتعدد الاهداف بدلآ من اقتصارها على هدف واحد . وبسبب القصور الذي واجه حل هذه المشاكل باستخدام نموذج البرمجة الخطية(Linear Programming) فقد ظهر اسلوب جديد يعرف بالبرمجة الهدفية (Goal Programming) الذي يعد طريقة للتعامل مع مشاكل القرار التي تشمل أهداف متعددة وغير متكافئة او متناقضة وحسب أهمية هذه الأهداف (Adam,1982),(Holzman,1981). وتمثل برمجة الأهداف أحدى التقنيات التي نجحت في تحليل قرار متعلق بأهداف متعددة .

وهي أداة فعالة وتعد اسلوبآ متطورآ ذا مستوى اختبار عال, إذ أنها تقدم حلآ معاصرآ لنظام معقد ذي أهداف متناقضة وتحل مشاكل اتخاذ القرار ذات الهدف الواحد أو الأهداف المتعددة. (Srivastava,1991)

وتمتاز البرمجة الهدفية بأنها أكثر مرونة من البرمجة الخطية من حيث سماحها بتحديد أهداف أكثر تناقضآ واختلافآ في الأبعاد (وحدات القياس) وبذلك تثمر حلآ امثلآ بالنسبة لأسبقية الأهداف المحددة . (Kothari,1992) .

وتعد البرمجة الهدفية احدى الطرائق المهمة في موضوع بحوث العمليات ولها تطبيقات واسعة , حيث تستعمل في حل مشاكل تخطيط القوى العاملة وادارة المستشفيات ومشاكل النقل وتخطيط الانتاج وتخطيط وسائل الاعلان والتخطيط المالي وغيرها. (Philips ,1987) .

تم في هذا البحث دراسة وتطوير طرق حل مسائل البرمجة الهدفية حيث تم دراسة الطريقة التقليدية والطريقة المطورة وتمت المقارنة بينهما والحصول على النتائج .

١- الطريقــة التقليديــة لحـل مسائــل البرمجــة الهدفيـة :

١,١- المقـدمـة:

الفكرة الاساسية للدوال متعددة الاهداف هي ارساء اهداف عديدة وصياغة دالة انجاز لهذه الاهداف ثم البحـث عـن حـل يصـغر مجمـوع الانحرافات عن الاهداف المحددة .
(اسماعيل,1995) , (Azarm ,1996) , (Ignizio ,1976)

ان الطريقة التقليدية هي احدى الطرائق المهمـة لحل مسائل البرمجة الهدفية في بحـوث العمليـات , حيث تفترض هذه الطريقة ان الانحراف المسموح به عن الهدف مقداره d حيث ان d متغير حر (أي يمكن ان يكون سالبآ او موجبآ او صفرآ) لذلك يعبر عنـه كفرق بين متغيرين غير سالبين أي ان

$$d=d^{+}-d^{-}$$

وان d^{+} : تمثل النقصان في الهدف .
وان d^{-} : تمثل الزيادة في الهدف.
(Markland,1983)

فاذا تم التعببير عن مسألة البرمجة الهدفية بالنموذج الرياضي الآتي:

$$Min\ f=\sum_{i=1}^{k} d_i$$

$$s.t.\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + d_i = g_i \qquad (i=1,\dots,k)$$

$$\dots\dots\dots\dots(1.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + s_{i-k} = b_i \qquad (i=k+1,\dots,m)$$

$$X_j \geq 0\ ,d_i\ \text{free}$$

نطبق الان على هذا النموذج الرياضي الخوارزميـة الاتية:

1.2- خوارزميـة الطريقـة التقليديـة :
(Karim,2000),(Ignizio ,1976)

1–اضافة متغيرات الانحـراف الـى الاهـداف فـي النموذج .

٢–تجميع متغيرات الانحراف في دالة انجاز واحدة .

3–نعوض عن متغيرات الانحراف كفرق بين متغيرين غير سالبين .

4–يحل النموذج الناتج بأسلوب حل مسائل البرمجة الخطية أي نستخدم طريقة السمبلكس او السمبلكس المقابل او طريقـة M الكبيـرة (Big- M) لحـين الوصول الى الحل الامثل للنموذج.

ولتوضيح هذه الخوارزمية نستعرض المثال الاتي :
مسألة 1

$$G1:7x_1+10x_2=1000$$

$$G2:x_1=\quad 10$$

$$G3:x_2=10$$

$$S.t.x_1+2x_2<=60$$

$$x_1,x_2 \geq 0$$

نضيف متغيرات الانحراف الى النموذج ونكون دالة انجاز كالاتي:

1000

$:x_1 +d_2= \quad 10$
$x_2 +d_3=10$
$x_1+2x_2<=60$
$x_1,x_2 \geq 0\ , d_1,d_2,d_3\ , free$

تم نعوض عن كل متغير انحراف كفرق بين متغيرين غير سالبين كالاتي :

MinZ=
$7x_1+10x_2 + d_1^{+}-d_1^{-}=1000$
$:x_1 + d_2^{+}-d_2^{-}= \quad 10$
$x_2 + d_3^{+}-d_3^{-}=10$
$x_1+2x_2<=60$
$,d_1^{+},d_1^{-},d_2^{+},d_2^{-},d_3^{+},d_3^{-} \quad \geq 0$
x_1,x_2

وباستخدام السمبلكس الجدولية حصلنا على الحل الامثل في الجدول السادس وفيه:

$d_1=580,d_2=-50,d_3=10,x_1=60,MINZ=540$

2- الطريقـة المطورة MPS لحـل مسائل البرمجـة الهدفيـة:

2.1 – المقـدمـة :

تستخدم هذه الطريقة لحل الدوال متتعددة الاهداف وكذلك ذات الهدف الواحد وعنـدما تكـون الاهـداف متساوية الاهمية او عنـدما تعطـى اوزان خاصـة . وتعتمد طرق حل مسائل البرمجـة الهدفيـة علـى اسلوب تحويل متغيرات الانحراف كفرق بين متغيرين غير سالبين لكن هذا الاسلوب يصعب التعامـل معـه عندما تكون اهداف المسألة وقيودها كثيـرة حيـث تكون الحسابات طويلة وجداول الحل كثيرة,ولتسهيل هذه الحسابات وتقليل عدد الجـداول تـم اسـتخدام الطريقة المطورةالتي تعتمد على المصفوفات لحـل مسائل البرمجة الهدفية في السـمبلكس بـدلاً مـن الطريقة الجدولية والتي من خلالها يتم التعبير عـن متغيرات الانحراف بدلالة المتغيرات الاخرى .

(Gass,1985) , (2005 , رشيد

2.2 – اسلـوب التعبيـر عن متغيـرات الانحـراف بدلالـة المتغيـرا ت الاخـرى: (Gass ,1985),(Taha ,2000)

افترض النموذج الرياضي (1.1) السابق فأن التعبيـر عن متغيرات الانحراف فـي دالـة الهـدف بدلالـة المتغيـرات الاخـرى يكـون كـالاتي :

$$Min\ f=\sum_{i=1}^{k} g_i-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

$$s.t.\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+d_i=g_i \qquad (i=1,\dots,k)$$

..................(2.1)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+s_{i+k}=b_i \qquad (i=k+1,\dots,m\quad)$$

$$X_j\geq 0\ ,d_i\ \text{free}$$

حيث ان :

$\sum_{i=1}^{k} g_i$:يمثل مجموع الاهداف للمسألة.

$\sum_{i=1}\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$:يمثل مجموع القيود للمسألة.

ان الطريقة المطـورة MPS التـي تعبـر عـن متغيرات الانحراف بدلالة المتغيرات الاخـرى تصـل كذلك الى النموذج (2.1) برمـوز مختلفـة , فلـو افترض النموذج (1.1) وافترض الاتي :

C_B	:	تمثل قيمة معاملات دالة الانجاز المناظرة لكلف المتغيرات الأساسية $x_B=(d_1,\dots,d_k,d_{k+1},\dots,x_m)$ حيث أن m تمثل عدد قيود النموذج
C	:	تمثل قيمة معاملات دالة الانجاز المنـاظرة لكلف المتغيرات غير الأساسية $x_{NB}=(x_{m+1},\dots,x_n)$ حيث أن n تمثل عدد متغيرات النموذج
B	:	تمثل مصفوفة الأساس لمعـاملات القيـود للمتغيرات الأساسية x_B الحرة وغير الحرة أي أن أبعاد هذه المصـفوفة هـي mxm ومصفوفة الأساس هذه تمثل مصفوفة غير شاذة (non singular)
A	:	تمثل مصفوفة معاملات القيود للمتغيـرات غير الأساسية x_{NB} حرة أو غير حرة.
b	:	تمثل قيمة ثوابت الطرف الأيمن للنموذج.
π	:	تمـثل مضروبات السمبلكس حيـــث $\pi=C_BB^{-1}$

إي أننا لو تعاملنا مع النموذج (1.1) بلغة المصفوفات فأنه يكون كالاتي :

$$Z - C_B X_B - C X_{NB} = 0$$
$$B X_B + A X_{NB} = b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -C_B & -C \\ 0 & B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ X_B \\ X_{NB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

وفي النهاية ستكون جميع المتغيرات التي لم تدخل الى الاساسية مساوية للصفر
أي ان

$$X_{NB} = 0$$

$$\therefore \quad Z - C_B X_B = 0$$
$$B X_B = b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -C_B \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ X_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Z \\ X_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & C_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_B B^{-1} b \\ B^{-1} b \end{pmatrix}$$

وعلى فرض أن $\pi = C_B B^{-1}$ فأن

$$= \begin{pmatrix} \pi b \\ B^{-1} b \end{pmatrix}$$

ومن المعادلة (1) يمكن الوصول الى ما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1 & C_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -C_B & -C \\ 0 & B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ X_B \\ X_{NB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & C_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -C+C_B B^{-1} A \\ 0 & 1 & B^{-1} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ X_B \\ X_{NB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_B B^{-1} b \\ B^{-1} b \end{pmatrix}$$

وبما أن $\pi = C_B B^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \pi A - C \\ 0 & I & B^{-1} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ X_B \\ X_{NB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi b \\ B^{-1} b \end{pmatrix}$$

ويمكن نقل هذه المعلومات إلى الجدول الأتي:

	X_B	X_{NB}	
Z	0	$\pi A - C$	πb
	I	$B^{-1}A$	$B^{-1}b$

وبما أن $X_B = (d_1,\ldots,d_k,X_{k+1},\ldots,X_m)$
$X_{NB} = (X_{m+1},\ldots,X_n)$

=

جدول الحل الابتدائي (2.1)

	متغيرات انحراف اساسية	متغيرات اساسية	متغيرات غير أساسية	
	$d_1,\ldots\ldots d_k$	$X_{k+1},\ldots\ldots,X_m$	$X_{m+1},\ldots\ldots,X_n$	
Z	0	0	$\pi A - C$	πb
d_1 . . . d_k	I_{dxd}	0	$B^{-1}A$	$B^{-1}b$
X_{k+1} . . . X_m	0	$I_{(m-d)x(m-d)}$		

٢,٣- خوارزمية الحل بطريقة MPS

1-اضافة متغيرات الانحراف الى النموذج الرياضي للمسألة.

2-تجميع متغيرات الانحراف في دالة انجاز واحدة.

3- تحديد عدد متغيرات المسألة (n) وعدد قيودها (m) وعدد عدد متغيرات الانحراف(d) وكذلك تحديد كل من A,b,B,C,C_B وإيجاد B^{-1} .

4- أيجاد قيمة كل منπ وZ حيث $\pi=C_BB^{-1}$
$Z=\pi b$
وإيجاد قيمة كل من $B^{-1}A, B^{-1}b$ ثم أيجاد $\pi A - C$.

5- يكون جدول الحل الابتدائي ويتم فحص معاملات دالة الهدف $\pi A - C$ كالأتي:-

<u>أولا :</u> أذا كان $\pi A - C \le 0$ للمتغيرات غير الأساسية فأن الحل أمثل ونتوقف عدا ذلك , نذهب إلى ثانيا.

<u>ثانيا:</u> أذا كان $\pi A - C > 0$ للمتغيرات غير الأساسية فالحل ليس أمثل لذا فأننا نستخدم طريقة السمبلكس أو السمبلكس المقابل حسب الحالة الملائمة لتحديد المتغير الداخل والمتغير الخارج والحصول على جدول MPS الجديد لحين الوصول إلى الحل الأمثل.

مسألة (٢.١)

$G_1: 7x_1+10x_2=1000$
$G_2: x_1= 10$
$G3: x_2=10$
$S.t. x_1+2x_2<=60$
$x_1,x_2 \ge 0$

لحل هذه المسألة وفق خوارزمية الطريقة المطورة نتبع الخطوات الاتية :

$G_1: 7x_1+10x_2+d_1=1000$
$G_2: x_1+d_2= 10$
$G_3: x_2+d_3=10$
$S.t. x_1+2x_2<=60$
$x_1,x_2 \ge 0$, d_1,d_2,d_3 , free

نكون دالة انجاز واحدة كالاتي

$Minf=d_1+d_2+d_3$
$d_1 + 7x_1+10x_2 =1000$
$d_2 + x_1 =10$
$d_3 + x_2 =10$
$x_1+2x_2+s_1=60$

عدد المتغيرات n=6
عدد القيود m=4
عدد متغيرات الانحراف d=3 أي أن

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0&7\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ c_B=(١,١,١,0),\quad c=(0,0),$$

$$b=\begin{pmatrix}١ & ١٠٠٠\\ & \cdots\\ ١ & ١٠٠١\\ & .\\ ١ & ١٠٠٢\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}A=\begin{pmatrix} -4 & -7 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}b=\begin{pmatrix} 580 \\ -50 \\ 10 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$\pi A - C = =(-5,-8)$

$Z = 540$

ننظم جدول MPS الابتدائي كالأتي:-

الجدول الابتدائي (٢,١)

b	d_1	d_2	d_3	X_1	X_2	S_1	v
Z	٠	٠	٠	٠	-5	-8	540
d_1	1	٠	٠	٠	-4	-7	580
d_2	٠	١	٠	٠	-2	-1	-50
d_3	٠	٠	١	٠	١	٠	10
X_1	٠	٠	٠	١	2	1	60

يعطي هذا الجدول الحل الأمثل وفيه -- $d_1=580, d_2=-50, d_3=10, x_1=60$, MINZ=540

أي أن الحل الأمثل كان بجدول واحد فقط .

للتأكد من سرعة اداء الطريقة المطورة MPS تم حل مسائل اخرى كثيرة اضافة الى المسألة الاولى وكانت جميع المسائل تشير الى ان الطريقة المطورة MPS قد قلصت عدد جداول الحل وبالتالي تقليص الوقت اللازم لحل المسألة . سنختار الان لا على التحديد خمسة مسائل ونقوم بحلها بالطريقة المطورة MPS وهذه المسائل هي :

مسألة ٢

$G_1: 3x_1+5x_2=15$
$G_2: x_1+x_2=9$
S.T. $x_1+x_2<=7$

مسألة ٣

$G_1: 7x_1+8x_2=100$
$G_2: x_1=50$
$G_3: x_2=40$
S.T. $2x_1+x_2<=80$

مسألة ٤

$G_1: 2x_1+3x_2=18$
$G_2: 2x_1+x_2=12$
$G3: x_1+x_2=8$
S.T. $x_1<=6$
$x_2<=3$

مسألة ٥

$G_1: 100x_1+150x_2=2000$
$G_2: 4x_1+2x_2=45$
$G_3: 2x_1+2x_2=35$
S.T. $x_1+2x_2<=20$

مسألة ٦

$G_1: x_1+x_2=10$
$G_2: 5x_1+3x_2=56$
S.T. $2x_1+3x_2<=12$

وكانت حصيلة الحل الامثل لجميع المسائل السابقة بالطريقة المطورة ممثلة بالجدول الاتي :

المسألة	عدد الجداول
2	٢
3	1
4	1
5	1
6	1

٣-النتائج:

3.1 - احصائية:

كانت حصيلة الحل لجميع المسائل السابقة بالطريقتين التقليدية والمطورة ممثلة بالجدول الاتي :

الطريقة التقليدية المسألة	عدد الجداول	الطريقة المطورةMPS المسألة	عدد الجداول
١	٧	١	١
٢	٤	٢	٢
٣	٦	٣	١
٤	٧	٤	١
٥	٧	٥	١
٦	٤	٦	١

3.2-الاستنتــاجــات:

نلاحظ من جدول المقارنة بين الطريقتين والمبين اعلاه ان الطريقة التقليدية لحــل مســائل البرمجــة الهدفية الخطية تزيد عدد المتغيــرات للمســألة بعــد اضافة متغيرات الانحراف لها حيث تعوض عن كــل متغير انحراف بفرق بــين متغيــرين غيــر ســالبين وبالتالي تكون الحسابات طويلة ومعقدة وجداول الحل كثيرة لحين الوصول الى الحل الامثل فــي حــين ان تطوير الطريقة قد حقق ما يأتي :

1-إن الطريقة المطورة MPS التي كانــت تســتخدم لإيجاد الحل الأمثل لمسائل البرمجــة الخطيــة غيــر المقيدة فقط تم تطويرها واســتخدامها لإيجــاد الحــل الأمثل لمسائل البرمجة الهدفية الخطية.

2- الطريقة المطورة MPS لــم تــزد مــن عــدد المتغيرات للمسألة الا بمقدار عدد الاهداف .

3- اختزال عدد جداول الحل الامثل , حيث وصل في الاقل الى النصف وبلغ في بعضها السبع ممــا ادى الى تقليل الوقت اللازم لحل المسألة .

4- إن استخدام اسلوب مطور يعتمد على المصفوفات لحل مسائل البرمجة الهدفية في السمبلكس بدلآ مــن الطريقة الجدولية ونتيجة لتقليص عدد الجداول قــد اسرع في الوصول الى الحل الامثل .

5- تكون جداول الحل بالطريقة المطــورة صــغيرة بالمقارنة مع جداول الحل بالطريقة التقليدية.

6 – ان جداول الحل قد تم برمجتها على الحاسوب و كانت في الطريقة المطورة اقل كلفــة لعــدم وجــود جداول كبيرة ولا جداول كثيرة .

المصادر References

1-اسماعيل ابراهيم جمعة ,زينات محمد محــرم ,"نمــاذج بحوث العمليات في اتخاذ القرارات ",الدار الجامعية للطباعة والنشر والتوزيع . الاسكندرية ,(1995) .

2-رشيد بشير رحيمه ,"دراسة وتطوير حل مسائل البرمجة الخطية غير المقيدة", رسالة ماجستير مقدمة الى قسم العلوم التطبيقية في الجامعة التكنولوجية,(2005).

3-Adam E.and Edert R."Production Operations Management",third edition ,prentice –Hall,Adivision of simon and Schuster Inc.,U.S.A,(1982)

4-Karim A.,"Multi-opjective Optimization techniques", http://www.glue.umd.edu./,(2000)

5-Azarm S.,"Multi objective optimum design", http://www.glue.umd.edu./,(1996)

6- Gass S.I. On the solution of linear programming problems with free variables, computer and operations research vol-12 no.3 , (1985)

7-Holzman A..G. ,"Mathematical programming for operations researchers and computer scientist ",Marcel Dekker Inc.,New york ,(1981).

8-Ignizio J.P.,"Goal programming and extension ",D.C. Heath ,Lexington, M.A.,(1976).

9- Ignizio J.P.,"linear programming in single and multi objective systems",Prentice –Hall,Englewood cliffs,N.J.,(1982).

10-Kothari C.R,"An introduction to operational research ",Vikas publishing House PVT LT D,(1992).

11-Markland R.E.,"Topics in Management Science ",Jon Wiley and Sons,New York,(1983).

12-Philips D.T.,Ravindran A.,and Solberg J.J,"operations research :principles and practice ", Jon Wiley and Sons,New York,(1987).

13- Srivastava .U.K.,"quantitative techniques for managerial decisions",Wiley Eastern Limited ,New Delhi,(1991).

14-. Taha H. A , "operations research , an interoduction", fifth edition,(2000).

Solving linear Goal Programming by Using the Matrices

Rasheed Basheer Reheima
University of Thi Qar-College of Siences

Abstract

The classical method is one of the common important methods in the field of operation research to solve linear goal programming problems.

This method represents the deviation variable as difference between two nonnegative variables in the objective function and the goals , The problems are then solved by using linear programming methods.

The aim of this paper is to develop such method .The developed method MPS is used then to solve linear goal programming problems. It is found that MPS method is better than the classical method, since MPS method reduces the solution tables which makes the calculations easier and reduces the time required to solve the problems under study .