الترقيم الدولي ٨٦٩٠ ـ ١٩٩١ ISSN 1991- 8690
Email: utjsci@utq.edu.iq website: http://jsci.utq.edu.iq

مقدّرات التقلص ذوات المرحلة الواحدة والمرحلتين لدالة المعولية

للتوزيع ألأسي باستخدام العينات الكاملة

علاء خليف جحيل

جامعة ذي قار– كلية التربية– قسم الرياضيات

الخلاصة

يتناول هذا البحث اقتراح بعض مقدرات التقلص ذوات المرحلة الواحدة والمرحلتين للدالة المعولية للتوزيع الاسي باستخدام العينات الكاملة . ويكون عامل التقلص هنا متغيرا يتم ايجاده عن طريق تصغيرمتوسط مربعات الخطا للمقدرات المقترحة وتم اشتقاق معادلات التحيز و متوسط مربعات الخطا و الكفاءة النسبية وطبقت عمليا باستخدام اسلوب المحاكاة (مونت كارلو).وتبين افضلية المقدرات المقترحة عن المقدرات الكلاسيكية في جوار المعلومات المسبقة.

1. المقدمة:

يقال للمتغير العشوائي T بانه يتوزع التوزيع الاسي اذا كانت له دالة كثافة الاحتمال الاتية:

$$f(t)=\begin{cases}\theta\exp(-t\theta) & t>0\\ 0 & e.w\end{cases} \qquad \text{.........................} \ (1)$$

وبهذا تكون الدالة التجمعية (Cumulative distribution) لهذا المتغير بشكل

$$\mathbf{F(t)}= 1-\exp(-t\theta) \qquad \text{.............................} \ (2)$$

يعتبر التوزيع الاسي من اهم نماذج الفشل المستخدمة في نظرية المعولية والتجديد ...الخ,وتعرف دالة المعولية (Reliability function) بكونها احتمالية ان يعمل جهاز ما او نظام حتى الزمن t بدون اعطال وتعرف رياضيا بشكل :

$$\mathbf{R(t)}= P(T\geq t)=1-F(t) \qquad \text{................................} (3)$$

فعندما يكون T يتوزع اسيا تكون دالة المعولية بالصيغة الاتية :

$$\mathbf{R\ (t)=\exp\ (-\ t\theta)} \ , \qquad \text{.................................} (4)$$

نلاحظ من المعادلة (4) ان دالة المعولية تعتمد على المعلمة المجهولة θ لذلك يجب تقدير المعلمة θ و بالتالي تقدير الدالة المعولية R(t) وهناك عدة طرائق للتقدير المعلمة θو R(t) , فعند عدم تتوافر معلومات مسبقة عن المعلمة θو R(t) نستخدم الطرائق الكلاسيكية للتقدير كان تكون طريقة الإمكان الأعظم (Maximum Likelihood Method) ويرمز لها بالرمز MLE أو طريقة العزوم (Moments Method) وغيرهما.

اما اذا توفرت بعض المعلومات المسبقة على شكل توزيع مسبق (Prior Distribution) فنستخدم طريقة بيز (Bayes) التخمينية.

اما اذا كانت المعلومات المسبقة على شكل قيمة اولية (Initial value)θ_0 نستخدم في هذه الحالة طرائق التقلص للتقدير و اول من اقترح هذا النوع من المقدرات Thompson (1968) مقترحا المقدر الاتي للتقدير متوسط التوزيع الطبيعي :

$$\tilde{\theta}=K\hat{\theta}+(1-k)\theta_0 \qquad \text{...............................} (5)$$

حيث $\hat{\theta}$هو مقدر لـ θ باحدى الطرائق الكلاسيكية . و K يسمى عامل التقلص , $\mathbf{0\leq k\leq 1}$ و بذلك نكون قد استطعنا ان نوفق بين المقدر الكلاسيكي و المعلومات المسبقة θ_0 بشكل تركيب خطي .

ان استخدام المعلومات المسبقة ربما تكون بعيدة عن القيمة الحقيقية θ لذلك لابد من اجراء اختبار اولي (Preliminary test) أي اختبار للفرضية $H:\theta=\theta_0$ مقابل الفرضية $H:\theta\neq\theta_0$ عند مستو معنوية α لمعرفة مدى اقتراب القيمة الاولية من القيمة الحقيقية .فعند قبول الفرضية H_0 يكون المقدر المستخدم هو :

$$\tilde{\theta} = K\hat{\theta} + (1-k)\theta_0$$

اما عند قبول الفرضية البديلة فنستبعد المعلومات المسبقة فيكون المقدر $\hat{\theta}$ فقط.وسمي هذا النوع من المقـــدرات بمقدرات الاختبار الاولـــي المقلصـــة ذات المرحلـــة الواحـــدة (preliminary test single stage shrunken estimation).

وبذلك يعرف مقدر التقلص بالشكل الاتي :

$$\tilde{\theta} = \begin{cases} K\hat{\theta} + (1-K)\theta_0 & \hat{\theta} \in R \\ \hat{\theta} & \hat{\theta} \notin R \end{cases} \qquad \text{.........................(6)}$$

في كثير من الاحيان تكون مفردات المجتمع ومن ثم مفردات العينة باهضة الثمن او نادرة جـــدا لـــذلك يفضـــل استخدام مقدرات غير مكلفة و لاجل ذلك اقترح الباحثون اسلوب ذي المرحلتين المتر افد (pooling tow stage) واول من اقترح هذا الاسلوب هو الباحث (Katti, (1962 وكان المقدر المتر افد الذي اقترحه لم يعتمـــد علـــى معلومات المسبقة الامن خلال تكـــوين المجـــال R .بعـــد ذلـــك قـــام الباحثـــان Arnold and AL-Bayyati (1970,1972) بربط بين اسلوب الباحث (Thompson,(1968 والباحث (Katti, (1962 واقترحـــا المقـــدر الاتي:

$$\tilde{\theta} = \begin{cases} K\hat{\theta}_1 + (1-K)\theta_0 & \hat{\theta}_1 \in R \\ \dfrac{n_1\hat{\theta}_1 + n_2\hat{\theta}_2}{n_1 + n_2} & \hat{\theta}_1 \notin R \end{cases} \qquad \text{...................(7)}$$

وتتميز هذه المقدرات بانها مقدرات غير مكلفة (اي اعتمادها على عدد قليل من مفردات العينة) وذات متوسط مربعات خطأ صغير . لقد درس المقدر اعلاه من قبل العديد من الباحثين للتقدير معالم مختلف التوزيعات نورد منهم:

;Katti ,1962 Adke et al 1987; Kambo et al , 1991 Adke and Gokhale 1989;

Al-Hemyari ,1999 ;Handa et al ,1988; الا ان دالة المعولية لم تقدر الا بالطرائق الكلاســيكية والبيزيـــة انظر Sinh, 1986

حتى جاء الباحثان (Pandey and Upadhyah,(1985 حيث اقترحا مقدرات التقلص لدالة المعوليـــة للتوزيـــع الاسي بالاعتماد على مقدرات بيزية بدلا عن مقدرات كلاسيكية وبالشكل الاتي :

$$\tilde{R}(t) = KR_B(t) + (1-k)R_0(t) \qquad \text{....................(8)}$$

حيث ان $R_B(t)$ هو المقدر البيزي لـــــ R(t) وان $R_0(t)$ =exp(-tθ.)

ثم جاء الباحث مضحي (1999) في رسالته للماجستير باقتراح المقدر الاتي لدالة المعولية :

$$\tilde{\mathbf{R}}_1(\mathbf{t}) = \begin{cases} \exp(-t/\theta_0), & \text{if } \hat{\theta} \in R, \\ \exp(-t/K\hat{\theta}), & \text{if } \hat{\theta} \notin R, \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

اما الباحث علاء خليف (2004) في رسالته للماجستير اقترح مقدر ذو المرحلتين المترافد لدالة المعولية بالاسلوب الاتي :

1- يتم الحصول على عينة عشوائية صغيرة تتبع التوزيع الآسي وبحجم n_1 ($n_1 < n$).

2- إيجاد المقدر الكلاسيكي (بإحدى الطرائق المعروفة (الترجيح الاعظم)) $\hat{\theta}_1$ اعتماداً على العينة أعلاه و حساب المقدر

$$\hat{\theta}_1 = 1/\overline{X}_1$$

٣- ايجاد مجال ما (R) بالاعتماد على صيغة مناسبة حول المعلومات المسبقة (θ_0).

٤- اذا كان $\hat{\theta}_1 \in R$ يكون المقدر المقترح من قبلنا لدالة المعولية :

$$\exp(-t(K\hat{\theta}_1 + (1-K)\theta_0)), \qquad 0 \le k \le 1$$

٥- إذ كان $\hat{\theta}_1 \notin R$ فيتم اختيار عدد صحيح موجب اخر ($n_2 = n - n_1$) n_2 يمثل حجم العينة المتبقية وبالاعتماد على كل المفردات تحسب $\hat{\theta}_2$ ثم ترفد بـــ$\hat{\theta}_1$ لنحصل على مقدر للمرحلة الثانية وبذلك يكون المقدر في هذه المرحلة:

$$\exp\left[-t\left(\frac{n_1\hat{\theta}_1 + n_2\hat{\theta}_2}{n_1 + n_2}\right)\right]$$

وهكذا يكون تقدير دالة المعولية المقترح والذي سيرمز له بالرمز $\tilde{R}_2(t)$ يعرف كما يلي

$$\tilde{R}_2(t) = \left[\exp(-t(K\hat{\theta}_1 + (1-K)\theta_0))I_R + \exp\left(\frac{-t(n_1\theta_1 + n_2\theta_2)}{n_1 + n_2}\right)I_{\overline{R}}\right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

حيث ان $I_{\overline{R}}, I_R$ دوال رمزية تمثل مجال القبول R ومجال الرفض $\overline{R}$.

على الرغم من الكثير من النقاط الايجابية في مقدرات الباحثان اعلاه الا انه توجد بعض العيوب فيها وهي اختيار قيم ثابتة الى K بدون اية ضوابط معينة لذلك سيكون هدفنا في هذا لبحث معالجة بعض العيوب من خلال الدمج بين اسلوب الباحثان اعلاه مع اسلوب الباحثان Pandey and Upadhyah,(1985) وبذلك سنقوم باقتراح المقدران ادناه لدالة المعولية للتوزيع الاسي

$$\tilde{R}_3(t)=\begin{cases} K\hat{R}(t)+(1-K)R_0(t), & \text{if } \hat{\theta}\in R \\ \hat{R}(t) & \text{if } \hat{\theta}\notin R \end{cases} \qquad \text{.............................(11)}$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_4(\mathbf{t})=\begin{cases} \mathbf{K\hat{R}_1(t)+(1-K)R_0(t)}, & \mathbf{if\ \hat{\theta}_1\in R} \\ \mathbf{exp(-t(\frac{n_1\hat{\theta}_1+n_2\hat{\theta}_2}{n_1+n_2}))}, & \mathbf{if\ \hat{\theta}_1\notin R} \end{cases} \qquad \text{............................(12)}$$

حيث $\hat{R}_1(t),\ \hat{R}(t)$ هما مقدر MLE لدالة المعولية و $\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_1$ هما مقدرا MLE للمعلمة θ.سيتم اشتقاق معادلات التحيز ومتوسط مربعات الخطا والكفاءة النسبية لكلا المقدرين اعلاه .

(٢) المقدر $\tilde{\mathbf{R}}_3(\mathbf{t})$:

٢،١ التحيز (Bais):

يعرف التحيز للمقدر $\tilde{\mathbf{R}}_3(\mathbf{t})$ بالشكل آلاتي:

$$B(\tilde{R}_3(t),R(t))=E(\tilde{R}_3(t))-\exp(-t\theta) \qquad \text{..............................(١٣)}$$

ولاغراض المقارنة سوف نستخدم نسبة التحيز(Bias Raito) بدلا عن التحيز (Bias) وتعرف بشكل :

$$\mathbf{Bias\ Raito(\tilde{R}_3(t),R(t))=B(\tilde{R}_3(t),R)/exp(-t\theta)} \qquad \text{..............................(14)}$$

وبافتراض ان

$$\mathbf{X=\hat{\theta}/n\theta}$$

نحصل على

$$\text{Bias Raito}(\tilde{\mathbf{R}}_3(\mathbf{t}),\mathbf{R})=\mathbf{exp(t\theta)\frac{K}{(n-1)!}\ \bar{K}_n(\sqrt{n\,t\,\theta})}+\frac{(1-k)}{(n-1)!}\exp(t\theta(1-\lambda))\int_{R^*}\frac{\exp(-\frac{1}{x})}{x^{n-1}}dx$$

$$+\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{(n-1)!}}\mathbf{exp(t\theta)(nt\theta)^{\frac{n}{2}}K_n}(2\sqrt{\mathbf{nt\theta}})-\mathbf{exp(t\theta)\bar{K}_n}(2\sqrt{\mathbf{nt\theta}})-1 \qquad \text{............... (15)}$$

حيث ان $R^* = [a^*, b^*],\ a^* < b^*$ وهو المجال المحول لمجال R بعد التعويض اعلاه، و $K_n(.)$ هـي دالـة بيسل(انظر[15] Watson) المعرفة في العلاقة:

$$\mathbf{K_n(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i t^{n+2i}}{2^{n+1}i!(n+i)!}} \qquad \text{............................(16)}$$

وان $\overline{\mathbf{K}}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ هي دالة بيسل غير الكاملة وهي دالة (Bessal) نفسها أعلاه ماعدا حدود التكامل تكون على*R وليس على الفترة [0 ,∞).

٢,٢ متوسط مربعات الخطأ(Mean Square Error):

يعرف متوسط مربعات الخطا للمقدر $\tilde{\mathbf{R}}_3(\mathbf{t})$ بالشكل الآتي:

$$MSE(\tilde{\mathbf{R}}_3(\mathbf{t}),R(t)) = \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}}_3(\mathbf{t})) - \mathbf{R}(\mathbf{t}))^2$$

$$= \frac{\exp(-2t\theta)}{(n-1)!}\left[\begin{array}{l} \mathbf{K}^2\mathbf{exp}(\mathbf{2t}\theta)\left[\begin{array}{l}\overline{\mathbf{K}}_{\mathbf{n}}(\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2nt}\theta}) - \mathbf{2exp}(-\mathbf{t}\theta\lambda)\overline{\mathbf{K}}_{\mathbf{n}}(\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{nt}\theta}) \\ + \mathbf{exp}(-2t\theta\lambda)\int_{\mathbf{R}^*}\frac{\mathbf{exp}(-\mathbf{1/x})}{\mathbf{x}^{\mathbf{n+1}}}\mathbf{dx}\end{array}\right] \\ + 2K\exp(2t\theta)(\exp(-t\theta\lambda) - \exp(t\theta)) \\ \left[\overline{\mathbf{K}}_{\mathbf{n}}(\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{nt}\theta}) - \mathbf{exp}(-\mathbf{t}\theta\lambda)\int_{\mathbf{R}^*}\frac{\mathbf{exp}(-\mathbf{1/x})}{\mathbf{x}^{\mathbf{n+1}}}\mathbf{dx}\right] \\ \exp(2t\theta)\left[(\exp(-t\theta\lambda) - \exp(t\theta))^2 - 1\right]\int_{\mathbf{R}^*}\frac{\mathbf{exp}(-\mathbf{1/x})}{\mathbf{x}^{\mathbf{n+1}}}\mathbf{dx}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\exp(2t\theta)\left[2(2nt\theta)^{\frac{n}{2}}K_n(2\sqrt{2nt\theta}) - \overline{\mathbf{K}}_{\mathbf{n}}(\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2nt}\theta})\right] \\ -2\exp(t\theta)\left[2(nt\theta)^{\frac{n}{2}}K_n(2\sqrt{nt\theta}) - \overline{\mathbf{K}}_{\mathbf{n}}(\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{nt}\theta})\right] \\ -\int_{\mathbf{R}^*}\frac{\mathbf{exp}(-\mathbf{1/x})}{\mathbf{x}^{\mathbf{n+1}}}\mathbf{dx} + 1\end{array}\right] \qquad \mathbf{(17)}$$

2.3 الكفاءة النسبية (Relative Efficiency):

لابـــد مـــن حســـاب متوســـط مربعـــات الخطـــأ للمقـــدر الكلاســـيكي $\tilde{\mathbf{R}}_3(\mathbf{t})$ لايجاد الكفاءة النسبية للمقدر

$$\hat{R}(t) = \exp(-t\hat{\theta})$$

$$MSE(\hat{R}(t)) = \frac{2}{(n-1)!}(2nt\theta)^{n/2}K_n(2\sqrt{2nt\theta}) - \frac{4exp(-t\theta)}{(n-1)!}(nt\theta)^{n/2}K_n(2\sqrt{nt\theta}) + exp(-2t\theta) \qquad (18)$$

تعرف الكفاءة النسبية للمقدر $\tilde{R}_3(t)$ نسبة للتقدير $\hat{R}(t)$ كما يلي:

$$RE(\tilde{R}_3(t),R) = \frac{MSE(\hat{R}(t))}{MES(\tilde{R}_3(t),R)} \qquad \text{..........................(19)}$$

(٣) المقدر $\tilde{R}_4(t)$:

٣,١ التحيز Bais:

يعرف التحيز للمقدر $\tilde{R}_4(t)$ بالشكل آلاتي:

$$\mathbf{B(\tilde{R}_4(t),R) = E(\tilde{R}_4(t)) - \exp(-t\theta)} \qquad \text{.........................(20)}$$

ونستخدم هنا ايضا كما في مقدر $\tilde{R}_3(t)$ نسبة التحيز(Bias Raito) بدلا عن التحيز (Bias) وتعرف بشكل :

$$\textbf{Bias Raito}(\tilde{R}_4(t),R) = B(\tilde{R}_4(t),R)/\exp(-t\theta) \qquad \text{...........................(21)}$$

وبافتراض ان

$$X = \hat{\theta}_1/n_1\theta\,,\;\; y = \hat{\theta}_2/n_2\theta$$

$$\text{Bias Raito}(\tilde{R}_4(t),R) = \exp(t\theta)\frac{K}{(n_1-1)!}\bar{K}_{n_1}(\sqrt{n_1\, t\theta}) + + \frac{(1-k)}{(n_1-1)!}\exp(t\theta\lambda)\int_{R^*}\frac{\exp(-\frac{1}{x})}{x^{n_1-1}}dx$$
$$+\frac{2\exp(t\theta)}{(n_2-1)!}\left(\frac{n_2^2 t\theta}{n_1+n_2}\right)^{n_2/2} K_{n_2}\left(2\sqrt{\frac{n_1^2 t\theta}{n_1+n_2}}\right)$$
$$\left[\frac{2}{(n_2-1)!}\left(\frac{n_2^2 t\theta}{n_1+n_2}\right)^{n_2/2} K_{n_1}\left(2\sqrt{\frac{n_1^2 t\theta}{n_1+n_2}}\right) - \bar{K}_{n_1}\left(2\sqrt{\frac{n_1^2 t\theta}{n_1+n_2}}\right)\right] - 1 \qquad (22)$$

٣,٢ متوسط مربعات الخطأ (Mean Square Error):

يعرف متوسط مربعات الخطا للمقدر $\tilde{R}_4(t)$ بالشكل آلاتي:

$$MSE(\tilde{R}_4(t),R(t))=E(\tilde{R}_4(t))-R(t))^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(23)$$

$$=\frac{\exp(-2t\theta)}{(n_1-1)!}\left[\begin{aligned}&K^2\exp(2t\theta)\left[\begin{aligned}&\bar{K}_{n_1}(2\sqrt{2n_1t\theta})-2\exp(-t\theta\lambda)\bar{K}_{n_1}(2\sqrt{n_1t\theta})\\&+\exp(-2t\theta\lambda)\int_{R^*}\frac{\exp(-1/x)}{x^{n_1+1}}dx\end{aligned}\right]\\&+2K\exp(2t\theta)(\exp(-t\theta\lambda)-\exp(t\theta))\\&\left[\bar{K}_{n_1}(2\sqrt{n_1t\theta})-\exp(-t\theta\lambda)\int_{R^*}\frac{\exp(-1/x)}{x^{n_1+1}}dx\right]\\&\exp(2t\theta)\left[(\exp(-t\theta\lambda)-\exp(t\theta))^2-1\right]\\&\int_{R^*}\frac{\exp(-1/x)}{x^{n_1+1}}dx+\frac{2\exp(2t\theta)}{(n_2-1)!}\left(\frac{2n_2^2t\theta}{n_1+n_2}\right)^{n_2/2}\end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned}&K_{n_2}\left(2\sqrt{\frac{2n_2^2t\theta}{n_1+n_2}}\right)\left[2\left(\frac{2n_1^2t\theta}{n_1+n_2}\right)^{n_1/2}K_{n_1}\left(2\sqrt{\frac{2n_1^2t\theta}{n_1+n_2}}\right)-\bar{K}_{n_1}\left(2\sqrt{\frac{2n_1^2t\theta}{n_1+n_2}}\right)\right]\\&-\frac{4\exp(t\theta)}{(n_2-1)!}\left(\frac{n_2^2t\theta}{n_1+n_2}\right)^{n_2/2}\\&K_{n_2}\left(2\sqrt{\frac{n_2^2t\theta}{n_1+n_2}}\right)\left[2\left(\frac{n_1^2t\theta}{n_1+n_2}\right)^{n_1/2}K_{n_1}\left(2\sqrt{\frac{n_1^2t\theta}{n_1+n_2}}\right)-\bar{K}_{n_1}\left(2\sqrt{\frac{n_1^2t\theta}{n_1+n_2}}\right)\right]+1\end{aligned}\right] \qquad (24)$$

٣,٣ الكفاءة النسبية (Relative Efficiency) :

لإيجاد الكفاءة النسبية للمقدر المقترح $\tilde{R}_4(t)$، لا بد من ايجاد متوسط مربعات الخطأ للمقدر الكلاسيكي في حالة الترافد أي ان

$$\hat{R}(t)=\exp(-t(\frac{n_1\hat{\theta}_1+n_2\hat{\theta}_2}{n_1+n_2}))$$

وان متوسط مربعات الخطأ للمقدر $\hat{R}(t)$ يعرف كما يلي:

$$MSE(\hat{R}(t)) = E((\hat{R}(t) - R(t))^2$$

وبعد إجراء بعض التبسيطات نحصل على

$$= exp(-2t\theta)\left[\begin{array}{l} \dfrac{4exp(2t\theta)}{(n_1-1)!(n_2-1)!}\left(\dfrac{2n_1^2t\theta}{n_1+n_2}\right)^{n_1/2}\left(\dfrac{2n_2^2t\theta}{n_1+n_2}\right)^{n_2/2} \\ K_{n_1}\left(2\sqrt{\dfrac{2n_1^2t\theta}{n_1+n_2}}\right)K_{n_2}\left(2\sqrt{\dfrac{2n_2^2t\theta}{n_1+n_2}}\right)-\dfrac{8exp(t\theta)}{(n_1-1)!(n_2-1)!} \\ \left(\dfrac{n_1^2t\theta}{n_1+n_2}\right)^{n_1/2}\left(\dfrac{n_2^2t\theta}{n_1+n_2}\right)^{n_2/2}K_{n_1}\left(2\sqrt{\dfrac{n_1^2t\theta}{n_1+n_2}}\right)K_{n_2}\left(2\sqrt{\dfrac{n_2^2t\theta}{n_1+n_2}}\right)+1 \end{array}\right] \qquad (24)$$

تعرف الكفاءة للمقدر $\tilde{\mathbf{R}}_4(\mathbf{t})$ نسبة للتقدير $\hat{R}(t)$ كما يلي:

$$\mathbf{RE}(\tilde{\mathbf{R}}_4(\mathbf{t}),\mathbf{R}) = \frac{\mathbf{MSE}(\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{t}),\mathbf{R}(\mathbf{t}))}{\mathbf{MES}(\tilde{\mathbf{R}}_4(\mathbf{t}),\mathbf{R}(\mathbf{t}))} \qquad \text{..................(٢5)}$$

<u>(٤) اختيار K (Choice K):</u>

كما وسبق قد نوهنا ان الهدف الرئيسي لهذا البحث هو معالجة بعض العيوب الخاصة باختيار عامل التقلص K في عمل الباحثان المضحي (١٩٩٩) و جحيل (٢٠٠٤) لذلك سوف نجد عامل التقلص K عن طريق تصغير المربعات الخطا بالنسبة الى K كمايلي:

$$\frac{\partial \mathbf{MES}(\tilde{\mathbf{R}}_3(\mathbf{t}),\mathbf{R}(\mathbf{t}))}{\partial \mathbf{K}} = 0$$

وبحل المعادلة اعلاه من اجل K نحصل على:

$$\mathbf{K}^* = \frac{(\mathbf{exp(-t\theta)} - \mathbf{exp(-t\theta\lambda)})\left[\overline{\mathbf{K}}_{\mathbf{n}}(2\mathbf{nt\theta}) - \mathbf{exp(-t\theta\lambda)}\overline{\mathbf{K}}_{\mathbf{n}}(\mathbf{nt\theta})\right]}{\overline{\mathbf{K}}_{\mathbf{n}}(2\mathbf{nt\theta}) - 2\,\mathbf{exp(-t\theta\lambda)}\overline{\mathbf{K}}_{\mathbf{n}}(\mathbf{nt\theta}) + \mathbf{exp(-2t\theta\lambda)}\int_{\mathbf{R}^*}\dfrac{\mathbf{exp(-1/x)}}{\mathbf{x^{n+1}}}\mathbf{dx}} \qquad \text{............(26)}$$

ولغرض ان نكون متاكدين ان قيمة K تقع في الفترة $[0,\ 1]$ لذلك تكون قيمة K بشكل الاتي

$$\mathbf{K} = \begin{cases} 0 & , \quad \mathbf{K}^* \le 0 \\ \mathbf{K}^* & , \quad 0 \le \mathbf{K}^* \le 1 \\ 1 & , \quad \mathbf{K}^* \ge 1 \end{cases} \qquad \text{...........................(27)}$$

هذا في حالة المقدر $\tilde{R}_3(t)$ اما في حالة المقدر $\tilde{R}_4(t)$ فهي نفس قيمة K اعلاه ماعدا ابدال n بـــــ n_1 فقط

(٥) اختبار المجال R (Region):

سيكون المجال هو مجال قبول الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ مقابل الفرضية البديلة $H_1 : \theta \neq \theta_0$ لمستوى معنوية α، حيث ان قاعدة الاختبار لهذه الفرضية هي:

$$T = \frac{2n\theta}{\hat{\theta}} \sim X^2_{2n} \qquad \text{.....................(28)}$$

وبذلك يكون المجال R بشكل الاتي :

$$\begin{aligned} R &= \left\{ \hat{\theta} : L_{1-\alpha/2} \leq \frac{2n\theta_0}{\hat{\theta}} \leq U_{\alpha/2} \right\} \\ &= \left\{ \hat{\theta} : \frac{2n\theta_0}{U_{\alpha/2}} \leq \hat{\theta} \leq \frac{2n\theta\circ}{L_{1-\alpha/2}} \right\} \end{aligned} \qquad \text{.......................... (29)}$$

ملاحظة :المجال اعلاه في حالة المقدر $\tilde{R}_3(t)$ وهو نفسه في في حالة المقدر $\tilde{R}_4(t)$ ماعدا استبدال n بـــــ n_1 و $\hat{\theta}$ بـــ $\hat{\theta}_1$.

(٦) النتائج العملية (Monte-Carlo Results):

في هذا المبحث ستتم دراسة المقدرين $\tilde{R}_4(t), \tilde{R}_3(t)$ من حيث الكفاءة النسبية، نسبة التحيز العينة ولمختلف المتغيرات المعتمدة عليها تلك المعادلات بطريقة المحاكاة مونت كارلو (monte –carlo) , تتضـــمن تجـــارب المحاكاة عدة مراحل مهمة وهي على النحو الاتي :

المرحلة الاولى :

تعد هذه المرحلة من المراحل المهمة التي تعتمد عليها المراحل اللاحقة وتتضمن :

أ) اختيار حجم العينة n :

لقد تم اختيار حجم العينة بالنسبة الى المقدر $\tilde{R}_3(t)$ هي $n = 4\ (2)\ 12$ اما المقدر $\tilde{R}_4(t)$ $n_1 = 4\ (2)\ 12$, $n_2 = 2(2)\ 12$.

ب) تحديد القيم الافتراضية :

لقد تم اختيار القيم الافتراضية لـــ $\lambda = \theta_0/\theta = 0.1\ (0.1)2$ وتم اجراء عدة تجارب اعتمادا على عدد القيم لـــ λ.

المرحلة الثانية :

وهي مرحلة توليد البيانات (Data Genration) اذ يتم توليد ارقام عشـــوائية ذات توزيـــع الاســـي باســـتخدام الخوارزمية الاتية :

1 . Read θ

2 . Generate U (uniform variable) from U (0 , 1)

3 . Set $t = - \theta \ Ln \ U$

4 . Deliver t as a random variable generated from exp (θ)

علما ان قيمة θ هي نفسها قيمة λ على فرض ان $\theta_0=1$.

المرحلة الثالثة :

وتمثل مرحلة ايجاد الكفاءة النسبية و نسبة التحيز لمقدران $\tilde{R}_4(t), \tilde{R}_3(t)$ باستخدام المعادلات التي تم اشتقاقها في الجانب النظري من البحث والموجودة في الصيغ (١٥), (١٩), (٢٢), (٢٤). وقـــد وضـــعت النتـــائج فـــي الجداول ١،٢،٣ علما ان عدد مكررات L كل تجربة هو ١٠٠٠ ولم نذكر جميع النتائج اختصارا .

جدول رقم (١) يبين الكفاءة النسبية و نسبة التحيز للمقدر $\tilde{R}_3(t)$ عند $\alpha = 0.01, \ t\theta = 0.2$

λ / n	٠,١	0.5	1.0	1.5	2
4	0.7776 - 0.9417	0.9435 - 0.2036	1.0110 - 0.1879	0.6924 - 0. 5267	0.5755 - 0.4727
6	0.8552 - 0.9981	0.9764 - 0.1503	1.0006 - 0.0714	0.6654 - 0.5050	0.5727 - 0.5390
8	0.8884 - 0.9999	0.9954 - 0.1688	1.0000 - 0.0770	0.6699 - 0.4852	0.6111 - 0.5799
10	0.9072 - 1.0000	0.9994 - 0.6782	1.0000 - 0.1311	0.6819 - 0.4354	0.6462 - 0.6177
12	0.9259 - 1.0000	٠,٩٩٩٩ - 0.3372	1.0000 - 0.1719	0.6961 - 0.4922	0.6798 - 0.6547

جدول رقم (٢) يبين الكفاءة النسبية للمقدر $\tilde{R}_4(t)$ عند $\alpha = 0.01,\ t\theta = 0.2$

λ / n1 n2	٠,١	0.5	1.0	1.5	2
4 2	1.0473	2.7940	24.4659	6.1649	3.9159
4	1.0474	2.8046	24.7938	6.1999	3.9226
6	1.0475	2.8047	24.7950	6.2001	3.9227
8	1.0475	2.8048	24.7951	6.2001	3.9228
10	1.0476	2.8048	24.7951	6.2002	3.9228
12	1.0476	2.8049	24.7951	6.2002	3.9227
6 2	1.0014	3.1571	15.9800	6.4445	5.3870
4	1.0014	3.1650	15.8438	6.4605	5.4039
6	1.0014	3.1651	15.8436	6.4606	5.4040
8	1.0014	3.1651	15.8436	6.4606	5.4040
10	1.0015	3.1652	15.8437	6.4607	5.4041
12	1.0015	3.1652	15.8437	6.4607	5.4040
8 2	1.0000	3.0147	13.7536	8.6196	3.8350
4	1.0000	3.0188	13.6705	8.6396	3.8397
6	1.0000	3.0189	13.6704	8.6397	3.8398
8	1.0001	3.0189	13.6704	8.6397	3.8398
10	1.0001	3.0190	13.6705	8.6380	3.8399
12	1.0001	3.0190	13.6705	8.6380	3.8399
10 2	1.0000	1.3417	9.0890	2.9183	2.8183
4	1.0000	1.3422	9.1053	2.9268	2.8210
6	1.0000	1.3422	9.1054	2.9268	2.8210
8	1.0000	1.3423	9.1054	2.9269	2.8211
10	1.0000	1.3423	9.1055	2.9269	2.8211
12	1.0000	1.3424	9.1055	2.9270	2.8212
12 2	1.0000	2.1325	8.6556	4.2162	3.7628
4	1.0000	2.1331	8.6668	4.2214	3.7667
6	1.0000	2.1331	8.6669	4.2214	3.7667
8	1.0000	2.1332	8.6669	4.2215	3.7668
10	1.0000	2.1332	8.6670	4.2215	3.7668

12	1.0000	2.1333	8.6670	4.2216	3.7669

جدول رقم (3) يبين نسبة التحيز للمقدر $\tilde{R}_4(t)$ عند $\alpha = 0.01,\ t\theta = 0.2$

λ n1	n2	٠,١	0.5	1.0	1.5	2
4	2	- 0.9418	- 0.2046	- 0.1887	- 0.5277	- 0.4741
	4	- 0.9417	- 0.2036	- 0.1879	- 0.5267	- 0.4727
	6	- 0.9417	- 0.2036	- 0.1879	- 0.5268	- 0.4727
	8	- 0.9418	- 0.2037	- 0.1880	- 0.5268	- 0.4727
	10	- 0.9418	- 0.2037	- 0.1880	- 0.5269	- 0.4728
	12	- 0.9418	- 0.2037	- 0.1881	- 0.5270	- 0.4728
	2	- 0.9981	- 0.1510	- 0.0721	- 0.5054	- 0.5395
	4	- 0.9981	- 0.1503	- 0.0714	- 0.5050	- 0.5390
	6	- 0.9981	- 0.1503	- 0.0714	- 0.5050	- 0.5390
	8	- 0.9981	- 0.1502	- 0.0713	- 0.5049	- 0.5389
	10	- 0.9981	- 0.1502	- 0.0713	- 0.5049	- 0.5389
	12	- 0.9981	- 0.1501	- 0.0712	- 0.5048	- 0.5388
8	2	0.9999	- 0.1692	- 0.0775	- 0.4855	- 0.5801
	4	0.9999	- 0.1688	- 0.0770	- 0.4852	- 0.5799
	6	0.9999	- 0.1688	- 0.0770	- 0.4853	- 0.5799
	8	0.9998	- 0.1687	- 0.0768	- 0.4851	- 0.5797
	10	0.9998	- 0.1687	- 0.0768	- 0.4851	- 0.5797
	12	0.9998	- 0.1686	- 0.0767	- 0.4850	- 0.5796
10	2	- 1.0000	- 0.6784	- 0.0939	- 0.4868	- 0.6178
	4	- 1.0000	- 0.6782	- 0.0935	- 0.4866	- 0.6177
	6	0.9999	- 0.6782	- 0.0936	- 0.4866	- 0.6177
	8	0.9999	- 0.6780	- 0.0936	- 0.4864	- 0.6175
	10	0.9999	- 0.6780	- 0.0936	- 0.4862	- 0.6173
	12	0.9998	- 0.6778	- 0.0934	- 0.4860	- 0.6170
12	2	- 1.0000	- 0.4668	- 0.0384	- 0.4334	- 0.6548
	4	- 1.0000	- 0.4666	- 0.0381	- 0.4922	- 0.6547
	6	- 1.0000	- 0.4666	- 0.0381	- 0.4922	- 0.6547
	8	0.9999	- 0.4664	- 0.0379	- 0.4920	- 0.6545
	10	0.9999	- 0.4664	- 0.0379	- 0.4920	- 0.6545

12	0.9999	- 0.4662	- 0.0377	- 0.4918	- 0.6543

(٧) الاستنتاجات (Conclusions) :

١. وجد ان المقدران $\tilde{R}_4(t),\ \tilde{R}_3(t)$ لهما كفاءة نسبية عالية كلما اقتربت قيمة λ من ١ من جهة اليمين ومن جهة اليسار اي عندما تقترب القيمة الحقيقية من المعلومات المسبقة (وهذا سلوك اغلب مقدرات التقلص)

٢. لوحظ بالنسبة الى المقدر $\tilde{R}_4(t)$ اتساع المجال الفعال (وهو المجال الذي تكون فية $R.E \geq 1$) .حيث $0 \leq \lambda \leq 2$.

٣. من خلال ملاحظة الجداول ١و٢ ظهر تمتع المقدر $\tilde{R}_4(t)$ بكفاءة النسبية اعلى مـــن المقــدر $\tilde{R}_3(t)$ وهذا كان متوقعا كون المقدر $\tilde{R}_4(t)$ هو مقدر ذو المرحلتين المترافد.

٤. وجد ان اعلى كفاءة النسبية متحققة عند $n_1 = 4, n_2 = 2$ بالنسبة الى المقــدر $\tilde{R}_4(t)$ وهــذا يعنـــي الحصول على مقدر جيد بعدد وحدات اقل .

٥. عند مقارنة الجدول (٢) مع الجداول لـــــــ جحيل (٢٠٠٤) تبين ان المقدر $\tilde{R}_4(t)$ يمتلك قيمة متقاربـــة لـــ $\tilde{R}_2(t)$ عند اختيار K=0.5 . اما عند اختيار K=0.1 او K=0.2 فتكون كفاءة المقدر $\tilde{R}_2(t)$ اعلى من $\tilde{R}_4(t)$.

٦. كذلك عند مقارنة الجدول (١) مع الجداول لـــ مضحي (١٩٩٩) ظهر ان المقــدر $\tilde{R}_3(t)$ افضــل مـــن المقدر $\tilde{R}_1(t)$ لكل الخيارات K .

٧. تبين ان اعلى كفاءة النسبية متحققة عند $t\theta = 0.2$ بالنسبة كلا المقدرين $\tilde{R}_4(t),\ \tilde{R}_3(t)$.

٨. لوحظ ان المقدران $\tilde{R}_4(t),\ \tilde{R}_3(t)$ مشابهان لسلوكهما بالنسبة الى المقدران $\tilde{R}_2(t),\ \tilde{R}_1(t)$ بكون الكفاءة النسبية لهما دالة متناقصة بالنسبة الى α واعلى كفاءة النسبية متحققة عند $\alpha = 0.01$.

٩. من ملاحظة الجداول (١)و (3) وجد ان نسبة التحيز بالنسبة للمقدريين $\tilde{R}_4(t),\ \tilde{R}_3(t)$ تكون قليلة جدا في جوار المعلومات المسبقة وتزداد كلما ابتعدنا عن المعلومات المسبقة وتكون قليلة عندما يكـــون حجـــم العينة صغير .

ملاحظة: بالنسبة الى المقدر $\tilde{R}_4(t)$ لم يتم حساب حجم العينة المتوقع (Expected value sample) لانه هو نفسه في عمل الباحث علاء خليف (2004).

المصادر(References) :

١. جحيل ،علاء خليف (٢٠٠٤)، مقدرات التقلص للاختبار الاولي ذو المرحلتين المترافد للدالة المعولية للتوزيع الاسي ،رســـالة ماجستير،مقدمة الى كلية التربية /ابن الهيثم جامعة بغداد;٢٦-٢٨

٢. مضحي ،جبار عبد (١٩٩٩)، بعض تقيمات المعولية للتوزيع الاسي باستخدام المعلومات المسبقة ،رســـالة ماجســـتير،مقدمة الى كلية التربية /ابن الهيثم جامعة بغداد ; ١٦-١٨

3. Adke, S.R., & Gokhale, D.V. (1989). A note on shrinkage factors in two stage testimation. Commun. Statist. Theory Meth., 18 (2) ; 633- 637.
4. Adke, S.R., Waiker, V.B and Schuurmann, F.J. (1987). A Two stage shrinkage testimator for the mean of an exponential distribution. Comm. Statist. Theor. Meth., A16 (6) ; 1821- 1834.
5. Al- Bayyati, H.A. and Arnold, J.C. (1972). On double stages estimation in simple linear regression using prior knowledge. Tehnometrics, 14, 2; 405−414
6. Al- Hemyari, Z.A. (1999), Sometimes- Pool testimator of the mean life for time Censored data- Al- fath J., Must. Univ., 4;1- 14.
7. Arnold and Al- Bayyati, H. A. (1970). On double stage estimation of the mean using prior knowledge. Biometrics, 26, ;787-800
8. Handan, B. R., Kambo, N. S. and Al- Hemyari, Z. A. (1988) On double stage shrunken estimator for the mean of exponential distribution. IAPQR. Trans. 13, 1;19.
9. Kambo, N. S., Handa B.R. and Al- Hemyari, Z. A. (1991). On shrunken estimator for exponential scale parameter. Journal of Statist. Planning and Inference, 24; 283-301.
10. Katti, S. K. (1962). Use of some a prior knowledge in the estimation of mean from double samples. Biomretrics, 18;139-147.
11. Pandey M. and Upadhyay, S. K. (1985). Bayseian shrinkage estimation of reliability from censored sample with exponential failure model. South Africa. Statist. J;21- 32.
12. Sinha, S. K. (1986). Reliability and Life Testing. Wily Eastern limited.
13. Thompson, J. R. (1968). Some shrinkage techniques for estimating the mean. JASA. 63;113- 123.
14. Watson, G. N. (1952), Treatise on the Theory of Bessel Function (2^{nd} ed), Cambridge University Press.

SHRUNKEN ESTIMATORS OF ONE &TWO STAGE FOR RELIABILITY FUNCTION OF EXPONENTIAL FAILURE MODEL USING COMPLET SAMPLE

Abstract

This paper we suggest some one & two stage shrunken estimators for reliability function of exponential distribution by using complete data .The shrunken factor is variable we find it by minimizing mean squared error for The suggest estimators .The bias, mean squared error and relative efficiency expressions are derived theoretically and assessed practically by using monte-carlo simulation . The results show the suggested estimators have better performance then classical estimators .